गणित (प्रश्न-पत्र I)

MATHEMATICS (Paper I)

समय : तीन घण्टे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खंडों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **Two Sections** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ । एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P ज्ञात कीजिए ताकि $P^{-1}AP$ एक विकर्ण-आव्यूह हो ।

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find a non-singular matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. 10

1.(b) दर्शाइए कि समरूप आव्यूहों के समान अभिलक्षणिक बहुपद होते हैं ।

Show that similar matrices have the same characteristic polynomial. 10

1.(c) प्रान्त $R : \{-3 \leq x^2 - y^2 \leq 3,\ 1 \leq xy \leq 4\}$ पर फलन $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)$ का समाकलन कीजिए ।

Integrate the function $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)$ over the domain $R : \{-3 \leq x^2 - y^2 \leq 3,\ 1 \leq xy \leq 4\}$. 10

1.(d) बिन्दु (1, 1, 1) पर शांकवज $3x^2 - y^2 = 2z$ के स्पर्श-तल का समीकरण निकालिए ।

Find the equation of the tangent plane at point (1, 1, 1) to the conicoid $3x^2 - y^2 = 2z$. 10

1.(e) विषमतलीय रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{8-y}{1} = \frac{z-3}{1}$ व $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ के बीच न्यूनतम-दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the shortest distance between the skew lines :

$\frac{x-3}{3} = \frac{8-y}{1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$. 10

2.(a) xy-तल के ऊपर के और ठीक नीचे के दीर्घवृत्तीय पैराबोलौएड $x^2 + \frac{y^2}{4} = z$, जो समतल $z = 9$ से कटा हुआ है, का आयतन मालूम कीजिए ।

Find the volume of the solid above the xy-plane and directly below the portion of the elliptic paraboloid $x^2 + \frac{y^2}{4} = z$ which is cut off by the plane $z = 9$. 15

2.(b) एक समतल, नियत बिन्दु (a, b, c) में से गुज़रता है तथा अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B व C पर काटता है । मूल बिन्दु O तथा A, B व C में से गुज़रने वाले गोले के केन्द्र का बिन्दु-पथ ज्ञात कीजिए ।

A plane passes through a fixed point (a, b, c) and cuts the axes at the points A, B, C respectively. Find the locus of the centre of the sphere which passes through the origin O and A, B, C. 15

2.(c) दर्शाइए कि समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$, गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$, को स्पर्श करता है । सम्पर्क बिन्दु ज्ञात कीजिए ।

Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$. Find the point of contact. 10

2.(d) मान लीजिए कि U व W सदिश समष्टि V के चार सुस्पष्ट विमीय उप-आकाश जहाँ पर विमा $V = 6$ । उप-आकाश $(U \cap W)$ की सम्भावित विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

Suppose U and W are distinct four dimensional subspaces of a vector space V, where $\dim V = 6$. Find the possible dimensions of subspace $U \cap W$. 10

3.(a) विचारिए आव्यूह-प्रतिरूपण $A : R^4 \to R^3$ है, जहाँ पर $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ । A की प्रतिछाया की विमा व एक आधार तथा कर्नल A की विमा व एक आधार भी ज्ञात कीजिए ।

Consider the matrix mapping $A : R^4 \to R^3$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$. Find a basis and dimension of the image of A and those of the kernel A. 15

3.(b) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह के विभिन्न अशून्य-अभिलक्षणिक सदिश रैखिक स्वतंत्र होते हैं ।

Prove that distinct non-zero eigenvectors of a matrix are linearly independent. 10

3.(c) यदि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

तब $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ व $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ की $(0, 0)$ का परिकलन कीजिए ।

If $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

calculate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ at $(0, 0)$. 15

3.(d) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन परस्पर लम्बवत् स्पर्शतलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दु-पथ ज्ञात कीजिए ।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 10

4.(a) समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy - 3x - 6y - 9z + 21 = 0$ को प्रमाणिक-रूप में व्यक्त कीजिए अतः शांकवज की प्रकृति निर्धारित कीजिए ।

Reduce the following equation to the standard form and hence determine the nature of the conicoid : $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy - 3x - 6y - 9z + 21 = 0$. 15

4.(b) x, y, z में समीकरणों के निम्नलिखित निकाय को विचारिए :

$$x + 2y + 2z = 1$$
$$x + ay + 3z = 3$$
$$x + 11y + az = b$$

(i) a के किन मानों के लिए निकाय का एकल-हल है ?

(ii) युग्म जोड़ों (a, b) के किन मानों के लिए समुदाय के एक से अधिक हल हैं ?

Consider the following system of equations in x, y, z :

$$x + 2y + 2z = 1$$
$$x + ay + 3z = 3$$
$$x + 11y + az = b.$$

(i) For which values of a does the system have a unique solution ?

(ii) For which pair of values (a, b) does the system have more than one solution ? 15

4.(c) परीक्षण कीजिए कि क्या अनंत समाकल $\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(1-x^2)^{2/3}}$ का अस्तित्व है ।

Examine if the improper integral $\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(1-x^2)^{2/3}}$ exists. 10

4.(d) सिद्ध कीजिए कि $\frac{\pi}{3} \leq \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leq \pi$ जहाँ पर D एकक डिस्क है ।

Prove that $\frac{\pi}{3} \leq \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leq \pi$ where D is the unit disc. 10

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) x-y समतल में सभी वृत्तों को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation representing all the circles in the x-y plane. 10

5.(b) मान लीजिए किसी द्रव्य-प्रवाह की धारा-रेखाएं, वक्र समुदाय $xy = c$ के द्वारा प्रदर्शित हैं । सम-विभव रेखाओं, अर्थात् धारा-रेखाओं को प्रदर्शित करने वाले वक्र-समुदाय के लंबकोणीय संवेदियों को ज्ञात कीजिए ।

Suppose that the streamlines of the fluid flow are given by a family of curves $xy = c$. Find the equipotential lines, that is, the orthogonal trajectories of the family of curves representing the streamlines. 10

5.(c) एक तार, कार्डिऑइड $r = a(1+\cos\theta)$, जिसकी प्रारम्भिक रेखा अधोगत ऊर्ध्वाधर है, के आकार में स्थिर है। m द्रव्यमान का एक छोटा छल्ला तार पर फिसल सकता है तथा कार्डिऑइड के बिन्दु $r=0$ से स्वाभाविक लम्बाई a की प्रत्यास्थ (elastic) डोरी से, जिसका प्रत्यास्थता गुणांक 4 mg है, बंधा है। छल्ले को विरामावस्था से, जबकि डोरी क्षैतिज है, छोड़ा जाता है। ऊर्जा-संरक्षण के नियमों का प्रयोग कर दर्शाइये कि $a\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) - g\cos\theta\,(1-\cos\theta) = 0$, g गुरुत्वाकर्षण के कारण त्वरण है।

A fixed wire is in the shape of the cardiod $r = a(1+\cos\theta)$, the initial line being the downward vertical. A small ring of mass m can slide on the wire and is attached to the point $r=0$ of the cardiod by an elastic string of natural length a and modulus of elasticity 4 mg. The string is released from rest when the string is horizontal. Show by using the laws of conservation of energy that
$a\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) - g\cos\theta\,(1-\cos\theta) = 0$, g being the acceleration due to gravity. 10

5.(d) स्थिरांकों a, b व c के किन मानों के लिए सदिश $\bar{V} = (x+y+az)\,\hat{i} + (bx+2y-z)\,\hat{j} + (-x+cy+2z)\,\hat{k}$ अघूर्णी है। इन मानों के साथ इस सदिश के बेलनी-निर्देशांकों में अपसारिता ज्ञात कीजिए।

For what values of the constants a, b and c the vector $\bar{V} = (x+y+az)\,\hat{i} + (bx+2y-z)\,\hat{j} + (-x+cy+2z)\,\hat{k}$ is irrotational. Find the divergence in cylindrical coordinates of this vector with these values. 10

5.(e) समय t पर एक गतिमान बिन्दु का स्थिति सदिश $\bar{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2+2t)\,\hat{k}$ है। इसके त्वरण $\bar{a}$ के अवयव वेग-सदिश $\bar{v}$ के समान्तर दिशा में तथा $\bar{r}$ व $\bar{v}$ के तल के लम्बवत् दिशा में समय $t=0$ पर ज्ञात कीजिए।

The position vector of a moving point at time t is $\bar{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2+2t)\,\hat{k}$. Find the components of acceleration $\bar{a}$ in the directions parallel to the velocity vector $\bar{v}$ and perpendicular to the plane of $\bar{r}$ and $\bar{v}$ at time $t=0$. 10

6.(a) (i) निम्नलिखित युगपत रेखीय अवकल समीकरणों को हल कीजिए :
$(D+1)y = z + e^x$ व $(D+1)z = y + e^x$, जहाँ y व z स्वतंत्र चर x के फलन हैं तथा $D \equiv \dfrac{d}{dx}$।

(i) Solve the following simultaneous linear differential equations :
$(D+1)y = z + e^x$ and $(D+1)z = y + e^x$ where y and z are functions of independent variable x and $D \equiv \dfrac{d}{dx}$. 8

6.(a) (ii) यदि किसी भी समय t पर बैक्टीरिया संख्या की वृद्धि दर उस समय विद्यमान संख्या के समानुपाती है तथा संख्या एक सप्ताह में दो गुणी हो जाती है तब 4 सप्ताह के बाद बैक्टीरिया की कितनी संख्या अपेक्षित है ?

(ii) If the growth rate of the population of bacteria at any time t is proportional to the amount present at that time and population doubles in one week, then how much bacterias can be expected after 4 weeks ? 8

6.(b) (i) अवकल समीकरण : $xy\,p^2 - (x^2 + y^2 - 1)\,p + xy = 0$, जहाँ पर $p = \dfrac{dy}{dx}$ है, पर विचार कीजिए। $u = x^2$ तथा $v = y^2$ द्वारा प्रतिस्थापन कर क्लेराउट्स रूप (Clairaut's form) में u, v तथा $p' = \dfrac{dv}{du}$ में व्यक्त कीजिए। अतएव या अन्यथा समीकरण को हल कीजिए।

(i) Consider the differential equation $xy\,p^2 - (x^2 + y^2 - 1)\,p + xy = 0$ where $p = \dfrac{dy}{dx}$. Substituting $u = x^2$ and $v = y^2$ reduce the equation to Clairaut's form in terms of u, v and $p' = \dfrac{dv}{du}$. Hence, or otherwise solve the equation. 10

6.(b) (ii) निम्नलिखित प्रारम्भिक-मान अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

$20y'' + 4y' + y = 0,\ \ y(0) = 3{\cdot}2$ व $y'(0) = 0$ ।

(ii) Solve the following initial value differential equations :

$20y'' + 4y' + y = 0,\ \ y(0) = 3{\cdot}2$ and $y'(0) = 0$. 7

6.(c) एक एकसमान अर्धगोला, क्षैतिज से ϕ कोण पर झुके हुए रुक्ष समतल पर अपने वक्रीय पृष्ठ को समतल से स्पर्श करते हुए रखा है। सन्तुलन के लिए ϕ का अधिकतम ग्राह्य मान निकालिए। यदि ϕ का मान इससे कम है तब क्या यह साम्यावस्था स्थिर है ?

A uniform solid hemisphere rests on a rough plane inclined to the horizon at an angle ϕ with its curved surface touching the plane. Find the greatest admissible value of the inclination ϕ for equilibrium. If ϕ be less than this value, is the equilibrium stable ? 17

7.(a) वक्र $\bar{r} = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ a\theta)$ के किसी भी बिन्दु $\bar{r} = (\theta)$ पर वक्रता-सदिश व इसका परिमाण निकालिए। दर्शाइये कि मूल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्बपाद का बिन्दु-पथ एक वक्र है जो पूर्णरूप से अतिपरवलयज $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ पर स्थित है।

Find the curvature vector and its magnitude at any point $\bar{r} = (\theta)$ of the curve $\bar{r} = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ a\theta)$. Show that the locus of the feet of the perpendicular from the origin to the tangent is a curve that completely lies on the hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$. 16

7.(b) (i) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 8x^3\sin(x^2) \text{ ।}$$

(i) Solve the differential equation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 8x^3\sin(x^2).$$ 9

7.(b) (ii) निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्राचल-विचरण विधि के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 44 - 76x - 48x^2 \text{ ।}$$

(ii) Solve the following differential equation using method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 44 - 76x - 48x^2.$$ 8

7.(c) एक कण त्रिज्या a के चिकनी ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार तार पर चलने में स्वतंत्र है । प्रारम्भिक समय $t = 0$ पर इसे वृत्त के निम्नतम बिन्दु A से ऐसे वेग से, वृत्त के अनुदिश फेंका जाता है जो इसे मात्र उच्चतम बिन्दु B तक ले जाने में ही सक्षम है । समय T को ज्ञात कीजिए जिस पर कण व तार के बीच प्रतिक्रिया शून्य हो ।

A particle is free to move on a smooth vertical circular wire of radius a. At time $t = 0$ it is projected along the circle from its lowest point A with velocity just sufficient to carry it to the highest point B. Find the time T at which the reaction between the particle and the wire is zero. 17

8.(a) W ग्राम भार व r त्रिज्या का एक गोला R से.मी. त्रिज्या की बेलनाकार बाल्टी की तली पर स्थित है । बाल्टी में h से.मी. $(h > 2r)$ की गहराई तक पानी भरा हुआ है । दर्शाइये कि गोले को पानी की सतह के ठीक ऊपर लाने में किया गया न्यूनतम कार्य $\left[W\left(h - \frac{4r^3}{3R^2}\right) + W'\left(r - h + \frac{2r^3}{3R^2}\right)\right]$ से.मी. ग्राम होना चाहिए । W' ग्राम गोले द्वारा विस्थापित पानी का भार है ।

A spherical shot of W gm weight and radius r cm, lies at the bottom of cylindrical bucket of radius R cm. The bucket is filled with water up to a depth of h cm $(h > 2r)$. Show that the minimum amount of work done in lifting the shot just clear of the water must be $\left[W\left(h - \frac{4r^3}{3R^2}\right) + W'\left(r - h + \frac{2r^3}{3R^2}\right)\right]$ cm gm. W' gm is the weight of water displaced by the shot. 16

8.(b) निम्नलिखित प्रारम्भिक-मान समस्या को लैपलास रूपान्तरण के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = r(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

जहाँ पर $r(x) = \begin{cases} 8 \sin x & \text{यदि} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{यदि} \quad x \geqslant \pi \end{cases}$

Solve the following initial value problem using Laplace transform :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = r(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

where $r(x) = \begin{cases} 8 \sin x & \text{if} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{if} \quad x \geqslant \pi \end{cases}$ 17

8.(c) (i) समाकलन $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} ds$ का अभिसरण प्रमेय से हल कीजिए :

जहाँ पर $\overline{F} = 3xy^2 \hat{i} + (yx^2 - y^3)\hat{j} + 3zx^2 \hat{k}$

तथा S बेलन $y^2 + z^2 \leqslant 4, -3 \leqslant x \leqslant 3$ का पृष्ठ है ।

(i) Evaluate the integral : $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} ds$ where $\overline{F} = 3xy^2 \hat{i} + (yx^2 - y^3)\hat{j} + 3zx^2 \hat{k}$ and S is a surface of the cylinder $y^2 + z^2 \leqslant 4, -3 \leqslant x \leqslant 3$, using divergence theorem. 9

8.(c) (ii) ग्रीन्स प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C F(\overline{r}) \cdot d\overline{r}$ का वामावर्ती दिशा में मूल्यांकन कीजिए :

जहाँ पर $F(\overline{r}) = (x^2 + y^2) \hat{i} + (x^2 - y^2) \hat{j}$

तथा $d\overline{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ और वक्र C, क्षेत्र $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2 - x^2\}$ की परिधि है ।

(ii) Using Green's theorem, evaluate the $\int_C F(\overline{r}) \cdot d\overline{r}$ counterclockwise where $F(\overline{r}) = (x^2 + y^2) \hat{i} + (x^2 - y^2) \hat{j}$ and $d\overline{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ and the curve C is the boundary of the region $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2 - x^2\}$. 8