www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

2006

गणित

प्रश्नपत्र-II

MATHEMATICS

Paper-II

निर्धारित समय : तीन घंटे] *[पूर्णांक : 200*

Time allowed : Three Hours] *[Maximum Marks : 200*

निर्देश : *(i) अभ्यर्थी अनिवार्य प्रश्न संख्या **1** एवं **6** हल करें और प्रत्येक खण्ड में अवशेष प्रश्नों में से अधिकतम **दो** को हल करें । कुल **पाँच** प्रश्नों को हल करें ।*

(ii) प्रत्येक प्रश्न के अंक अंत में दिये गये हैं ।

Note : *(i) Candidate should attempt Question Nos. **1** and **6** compulsorily and not more than **two** from each Section of the remaining ones. In all, **five** questions are to be attempted.*

(ii) Marks carried by each question are indicated at its end.

खण्ड – अ

SECTION – A

1. (क) सिद्ध कीजिए कि एक मैट्रिक समष्टि का एक सुसंगत उप समुच्चय संवृत और परिबद्ध होता है । क्या इसका विलोम भी सत्य है ? औचित्य बताइए । **10**

(ख) कैले प्रमेय का कथन दीजिए और सिद्ध कीजिए । **10**

(ग) दिखाइए कि स्थिर आर्ग्यूमेंट वाला विश्लेषिक फलन अचर होता है । **10**

(घ) सिद्ध कीजिए एक तत्समक सहित क्रम विनमेय वलय क्षेत्र होता है यदि और केवल यदि इसके पास कोई उचित गुणजावली न हो । **10**

(a) Prove that a compact subset of a metric space is closed and bounded. Does the converse hold ? Justify.

(b) Give the statement of Caley's theorem and prove it.

(c) Show that an analytic function with constant argument is constant.

(d) Prove that a commutative ring with unity is a field iff it has no proper ideal.

2. (क) दिखाइए कि अनुक्रम $\{f_n(x)\}$, जहाँ $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$; $[0, 1]$ में एक समान अभिसरित नहीं है । **20**

(ख) दिखाइए कि $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ अभिसरित है । **20**

(a) Show that the sequence $\{f_n(x)\}$ where $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$ is not uniformly convergent on $[0, 1]$.

(b) Show that $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ is convergent.

www.prepp.in

3. (क) सिद्ध कीजिए कि एक परिबद्ध फलन f जो [a, b] में सीमित संख्या में असतत बिन्दु खाता है, R-समाकलनीय होता है । 20

(ख) मान लीजिए $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

दर्शाइए कि $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ विद्यमान नहीं है जबकि $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y) = 0$. 20

(a) Prove that a bounded function f, having a finite numbers of point of discontinuity on [a, b] is R integrable on [a, b].

(b) Let $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Show that $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ does not exist while $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y) = 0$.

4. (क) यदि $0 < |z - 1| < 2$ तो $f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 3)}$ को $(z - 1)$ के धनात्मक एवं ऋणात्मक घात वाली श्रेणी में व्यक्त कीजिए । 20

(ख) यदि $a > 0$, $m > 0$, तो सिद्ध कीजिए (पारेखीय समाकलन द्वारा) 20

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}(1 + ma)e^{-ma}$$

(a) If $0 < |z - 1| < 2$, then express

$f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 3)}$ in a series of positive and negative power of $(z - 1)$.

(b) If $a > 0$, $m > 0$, then prove that by contour integration

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}(1 + ma)e^{-ma}$$

5. (क) समीकरण $p^2x + q^2y = z$ का पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिए । 20

(ख) हल कीजिए : $r + s - 6t = y \sin x$ 20

(a) Find the complete integral of the equation $p^2x + q^2y = z$.

(b) Solve : $r + s - 6t = y \sin x$

www.prepp.in

Prepp Your Personal Exams Guide

6. (क) रुंगे-कुट्टा विधि का उपयोग कर $x = 0.1$ के लिए $\frac{dy}{dx} = x + y$ को हल कीजिए । दिया है कि $x = 0$ पर $y = 1$ है । **10**

(ख) आयत ABCD की भुजाओं AB और AD की लम्बाइयाँ 2a और 2b हैं । दिखाइए कि A पर मुख्य अक्षों में से एक का AB पर झुकाव $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}\right\}$ है । **15**

(ग) A और B गेम खेलते हैं जिसमें प्रत्येक के पास 5 पैसे, 10 पैसे और 20 पैसे के तीन सिक्के हैं । प्रत्येक दूसरे के चुनाव को जाने बगैर एक सिक्का चुनते हैं । यदि दोनों के द्वारा चुने गये सिक्कों का योग विषम है तो A, B का सिक्का जीत लेता है तथा यदि योग सम है B, A का सिक्का जीत लेता है । प्रत्येक खिलाड़ी के लिए सर्वोत्तम योजना तथा गेम का मान ज्ञात कीजिए । **15**

(a) Solve $\frac{dy}{dx} = x + y$ for $x = 0.1$ by using Runge-Kutta method where $x = 0$, $y = 1$.

(b) The length AB and AD of the sides of rectangle ABCD are 2a and 2b. Show that the inclination of AB of one of the principal axes at A is $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}\right\}$.

(c) A and B play a game, in which each has three coins a 5p, 10p and 20p. Each select a coin without knowledge of the others choice. If the sum of the coins is an odd amount, A wins B's coins if the sum of coins is an even, B wins A's coin. Find the best strategy for each player and the value of the game.

7. (क) निम्नलिखित सारणी से $f'(4)$ का मान ज्ञात कीजिए : **20**

x	1	2	4	8	10
$f(x)$	0	1	5	21	27

(ख) न्यूटन-रॉफसन विधि द्वारा $\sqrt{12}$ का मान दशमलव के शुद्ध पाँच अंकों तक ज्ञात कीजिए । **20**

(a) Determine $f'(4)$ from the following table or data :

x	1	2	4	8	10
$f(x)$	0	1	5	21	27

(b) Obtain the value of $\sqrt{12}$ to five places of decimal by Newton-Raphson method.

8. (क) सिम्प्लेक्स विधि का उपयोग करते हुए निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए : **20**

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

(ख) परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । **20**

www.prepp.in

(a) Solve the following system of simultaneous linear equation by using the simplex method :

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

(b) Find the area between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

9. (क) यदि बिन्दु (x, y, z) पर असंपीड्य तरल का वेग $\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$ से दिया जाता है तो सिद्ध कीजिए कि तरल गति सम्भव है तथा वेग विभव $\frac{\cos\theta}{r^2}$ है । 20

(ख) दिखाइए कि यदि एक अपरिभ्रमणीय तरल गति का वेग विभव $A\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\, z \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ के बराबर है तो प्रवाह रेखा सतह श्रेणी $(x^2 + y^2 + z^2) = K^{2/3}\,(x^2 + y^2)^{2/3}$ पर स्थित है । 20

(a) If velocity of an incompressible fluid at the point (x, y, z) is given by $\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$. Prove that the liquid motion is possible and velocity potential is $\frac{\cos\theta}{r^2}$.

(b) Show that if the velocity potential of an irrotational motion is equal to $A\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\, z \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ then the lines of flow on the series of surfaces are $(x^2 + y^2 + z^2) = K^{2/3}\,(x^2 + y^2)^{2/3}$.

10. (क) दो स्थिर सीमाओं $\theta = \frac{\pi}{6}$ और $\theta = -\frac{\pi}{6}$ के बीच, बिन्दु $r = c$, $\theta = \alpha$ पर स्रोत और मूल बिन्दु पर एक सिंक के कारण एक द्वि आयामी द्रव गति है और जिस चाल से स्रोत इसे पैदा करता है उसी चाल से पानी सोखता है । धारा फलन ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि धारा रेखाओं में से एक, वक्र $r^3 \sin 3\alpha = c^3 \sin 3\theta$ का हिस्सा है । 20

(ख) दिखाइए कि एक डबलेट का प्रतिबिम्ब एक गोले के सापेक्ष जिसका अक्ष गोले के केन्द्र से जाता है, प्रतिलोम बिन्दु पर एक डबलेट है । 20

(a) Between the fixed boundaries $\theta = \frac{\pi}{6}$ and $\theta = -\frac{\pi}{6}$, there is two dimensional liquid motion due to a source at the point $r = c$, $\theta = \alpha$ and a sink at the origin, absorbing water at the same rate as the source produce it. Find the stream function and show that one of the streamlines is a part of the curve $r^3 \sin 3\alpha = c^3 \sin 3\theta$.

(b) Show that the image with regard to the sphere of a doublet whose axis passes through the centre of the sphere is a doublet at the inverse point.