www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

2006

गणित

प्रश्नपत्र-I

MATHEMATICS

Paper-I

निर्धारित समय : तीन घण्टे]
Time allowed : Three Hours]

[पूर्णांक : 200
[Maximum Marks : 200

नोट : (i) *अभ्यर्थी अनिवार्य प्रश्न संख्या **1** एवं **6** एवं प्रत्येक खण्ड में शेष प्रश्नों में से अधिकतम **दो** को हल करें । कुल **पाँच** प्रश्नों को हल करें ।*

(ii) ***सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं ।*

Note : (i) *Candidates should attempt Question Nos. **1** & **6** which are compulsory and not more than **two** in each section of the remaining ones. In all, **five** questions are to be attempted.*

(ii) ***All** questions carry equal marks.*

Prepp
Your Personal Exam Guide

खण्ड – अ

SECTION – A

1. (अ) सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$

(ब) बिन्दु A के निर्देशांक (2, 3, –5) हैं । बिन्दु A से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा OA से समकोण बनाता है, जहाँ O मूल बिन्दु है ।

(स) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय W जो कि सदिश समष्टि $V_3(R)$ के अवयवों का है एवं जिसके अवयव $(x + 2y, y, -x + 3y)$ के रूप में हैं, $V_3(R)$ का उपसमष्टि है, जहाँ $x, y \in R$.

(द) अवकल समीकरण

$(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए ।

www.prepp.in

Prepp Your Personal Exams Guide

(a) Prove that : $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$

(b) The co-ordinates of a point A are (2, 3, –5). Find the equation of the plane through A and at right angles to the line OA, where O is the origin.

(c) Show that the set W of the elements of the vector space $V_3(R)$ of the form $(x + 2y, y, -x + 3y)$ where $x, y \in R$, is a subspace of $V_3(R)$.

(d) Solve the differential equation

$$(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0.$$

2. (अ) माना U एवं V किसी क्षेत्र F पर दो सदिश समष्टि हैं और T एक रैखिक रूपांतरण है U से V में । माना U परिमित विमीय है तो सिद्ध करो :

कोटि (T) + शून्यीय (T) = विमा U.

(ब) सिद्ध कीजिए कि रैखिक संकारक T के अभिलाक्षणिक मानों के संगत अभिलाक्षणिक सदिश रैखिकत: स्वतंत्र हैं ।

(a) Let U and V be vector spaces over the field F and T be a linear transformation from U into V. Suppose that U is finite dimensional. Then prove that

rank (T) + nullity (T) = dim U.

(b) Prove that distinct characteristic vectors of a linear operator T corresponding to distinct characteristic values of T are linearly independent.

3. (अ) वक्र $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ के अनंतस्पर्शी निकालिए ।

(ब) सिद्ध कीजिए : $\left|\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right.$

(a) Find the asymptotes of the curve

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$$

(b) Prove that : $\left|\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right.$

www.prepp.in

4. (अ) प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ की [illegible]

(ब) सतह $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ पर अभिलंब, तीन मुख्य समतलों को G_1, G_2, G_3 पर मिलते हैं । सिद्ध कीजिए PG_1, PG_2, PG_3 एक नियत अनुपात में हैं । यदि $PG_1^2 + PG_2^2 + PG_3^2 = k^2$ तो P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए ।

(a) Find the condition that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may be a tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(b) The normal at $P(\alpha, \beta, \gamma)$ of surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ meets the three principal planes at G_1, G_2, G_3; prove that PG_1, PG_2, PG_3 are in a constant ratio. Further, if $PG_1^2 + PG_2^2 + PG_3^2 = k^2$, then find the locus of P.

5. (अ) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = \frac{e^y}{x^2}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + e^x + \cos 2x$

(ब) (i) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x} \cdot \sin x$ को हल कीजिए ।

(ii) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ को हल कीजिए ।

(a) Solve the following differential equations :

(i) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = \frac{e^y}{x^2}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + e^x + \cos 2x$

(b) (i) Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x} \cdot \sin x$$

(ii) Solve the differential equation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$$

www.prepp.in

SECTION – B

Prepp Your Personal Exams Guide

6. (अ) इम्पल्सिव बल और उसके इम्पल्स को परिभाषित कीजिए । इम्पल्सिव बल की क्रिया के अधीन कण के लिये गति समीकरण ज्ञात कीजिए ।

(ब) यदि आपेक्षिक घनत्व s_1, s_2, s_3 वाले द्रवों में किसी पिण्ड का आभासी भार क्रमश: w_1, w_2, w_3 हो तो सिद्ध कीजिए

$$w_1 (s_2 - s_3) + w_2 (s_3 - s_1) + w_3 (s_1 - s_2) = 0.$$

(स) दिखाइये कि सदिश $2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$, $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ एवं $\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c}$ एक समतलीय नहीं हैं, जहाँ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ एक समतलीय सदिश नहीं हैं ।

(द) ध्रुव की ओर लगे हुए बल P के अधीन एक कण वक्र $r = 2a \cos \theta$ पर गतिमान है । बल का नियम ज्ञात कीजिए ।

(a) Define an impulsive force and its impulse. Obtain the equation of motion of a particle under the action of an impulsive force.

(b) If w_1, w_2, w_3 be the apparent weights of a given body in liquids of specific gravities s_1, s_2 and s_3 respectively, then show that

$$w_1 (s_2 - s_3) + w_2 (s_3 - s_1) + w_3 (s_1 - s_2) = 0.$$

(c) Show that the vectors $2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$, $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ and $\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c}$ are non-coplanar where $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are non-coplanar vectors.

(d) A particle describes the curve $r = 2a \cos \theta$ under the force P directed to the pole. Find the law of force.

7. (अ) माना $\bar{A}$ एक सदिश है । सिद्ध कीजिए :

(i) $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$

(ब) $\bar{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ के लिये, स्टोक प्रमेय को सत्यापित कीजिए जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ की ऊपरी अर्द्ध सतह है तथा C इसकी सीमा है ।

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(a) Let $\bar{A}$ be a vector. Prove that

(i) $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$

(b) Verify Stoke's theorem for $\bar{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$, where S is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and C is its boundary.

8. (अ) (i) क्रोनेकर डेल्टा को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निर्देशांक निकाय में इसके अवयव समान हैं ।

(ii) [ij, k] और $\begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix}$ के बीच सम्बन्ध को लिखिये और तदनुसार सिद्ध कीजिए

$$[ij, k] \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = [lm, k] \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रथम प्रकार के क्रिस्टोफल कोष्ठक किसी प्रदिश के अवयव नहीं हैं ।

(a) (i) Define Kroneckar delta and show that it has the same components in every coordinate system.

(ii) Write the relation between [ij, k] and $\begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix}$ and hence show that

$$[ij, k] \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = [lm, k] \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$$

(b) Show that Christoffel brackets of the first kind are not components of a tensor.

9. (अ) एक भारी प्रत्यास्थ स्ट्रिंग, जिसकी प्राकृतिक लम्बाई $2\pi a$ है, ऊर्ध्वाधर अक्ष और अर्द्ध-ऊर्ध्वाधर कोण α वाले शंकु पर चारों ओर रखी गयी है । यदि स्ट्रिंग का भार W और उसकी प्रत्यास्थता गुणांक λ हो तो सिद्ध कीजिए कि यह एक वृत्त के आकार में सन्तुलन में होगी जिसकी त्रिज्या $a\left(1 + \frac{W}{2\pi\lambda} \cot \alpha\right)$ है ।

(ब) दो बल क्रमश: रेखाओं $y = 0, z = 0$ और $x = 0, z = c$ के अनुदिश कार्य कर रही हैं । सिद्ध कीजिए कि बलों में परिवर्तन से उनके समतुल्य रेंच के अक्ष द्वारा जनित तल का समीकरण $(x^2 + y^2) z = cy^2$ है ।

(a) A heavy elastic string, whose natural length is $2\pi a$, is placed round a smooth cone whose axis is vertical and whose semi-vertical angle is α. If W be the weight and λ the modulus of elasticity of the string, prove that it will be in equilibrium when in the form of a circle whose radius is $a\left(1 + \frac{W}{2\pi\lambda} \cot \alpha\right)$.

(b) Two forces act, one along the line $y = 0, z = 0$ and the other along the line $x = 0, z = c$. As the forces vary, show that the surface generated by the axis of their equivalent wrench is $(x^2 + y^2) z = cy^2$.

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

10. (अ) तीन लगातार सेकण्ड के अन्त में किसी कण की दूरी, जो कि सरल आवर्त गति में है, माध्य अवस्था से एक ही दिशा में 1, 5 एवं 5 है । सिद्ध कीजिए कि पूर्ण दोलन का समय $\frac{2\pi}{\cos^{-1}(3/5)}$ है ।

(ब) एक द्रव में डूबे एक समचतुर्भुज का एक शीर्ष सतह पर है तथा शीर्ष से गुजरता विकर्ण ऊर्ध्वाधर है । सिद्ध कीजिए कि दाब केन्द्र विकर्ण को 7 : 5 के अनुपात में बाँटता है ।

(a) At the ends of three successive seconds the distances of a point moving with simple harmonic motion from its mean position, measured in the same direction are 1, 5 and 5. Prove that the period of a complete oscillation is $\frac{2\pi}{\cos^{-1}(3/5)}$.

(b) A rhombus is immersed in a liquid with a vertex in the surface and the diagonal through the vertex is vertical. Prove that the centre of pressure divides the diagonal in the ratio 7 : 5.

Prepp
Your Personal Exam Guide