www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

C-BRN-N-UBUA

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time allowed : **Three** Hours

अधिकतम अंक : **250**
Maximum Marks : **250**

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें आठ प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड A

SECTION A

Q1. ***सभी*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) एक सदिश R^3 में ज्ञात कीजिए, जो कि V तथा W के प्रतिच्छेद का जनक है, जहाँ कि V एक xy समतल है तथा W सदिश (1, 2, 3) तथा सदिश (1, –1, 1) के द्वारा जनित किया गया आकाश (स्पेस) है ।

Find one vector in R^3 which generates the intersection of V and W, where V is the xy plane and W is the space generated by the vectors (1, 2, 3) and (1, –1, 1). *10*

(b) प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग करके, आव्यूह (मैट्रिक्स)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

की कोटि ज्ञात कीजिए ।

Using elementary row or column operations, find the rank of the matrix *10*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x + 1 = 0$ के दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin x + 1 = 0$ का एक वास्तविक मूल स्थित है ।

Prove that between two real roots of $e^x \cos x + 1 = 0$, a real root of $e^x \sin x + 1 = 0$ lies. *10*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(d) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

10

(e) परीक्षण कीजिए कि क्या समतल $x + y + z = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को समकोणीय (लंब) रेखाओं में काटता है ।

Examine whether the plane $x + y + z = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines.

10

Q2. (a) मान लीजिए कि V और W निम्न उपसमष्टियाँ हैं R^4 की :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ और

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

(i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$ का एक आधार और विस्तार ज्ञात कीजिए ।

Let V and W be the following subspaces of R^4 :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ and

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

Find a basis and the dimension of (i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$.

15

(b) (i) λ तथा μ के मान जाँच कीजिए ताकि समीकरण $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ का (1) कोई हल नहीं है, (2) एक अद्वितीय हल है, (3) अपरिमित हल हैं ।

Investigate the values of λ and μ so that the equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ have (1) no solution, (2) a unique solution, (3) an infinite number of solutions.

10

www.prepp.in

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए कैली – हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए और अतएव इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । साथ ही, $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$ के द्वारा निरूपित आव्यूह भी ज्ञात कीजिए ।

Verify Cayley – Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and hence find its inverse. Also, find the matrix represented by $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$. *10*

(c) रूपांतर $x + y = u$, $y = uv$ का प्रयोग करते हुए, समाकल $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ का सीधी रेखाएँ $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर मूल्यांकन कीजिए ।

By using the transformation $x + y = u$, $y = uv$, evaluate the integral $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ taken over the area enclosed by the straight lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$. *15*

Q3. (a) एक ऐसे महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जो कि a त्रिज्या के गोले के भीतर आ सके ।

Find the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius a. *15*

(b) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ के द्वारा प्रतिबंधित $x^2 + y^2 + z^2$ के अधिकतम या निम्नतम मान ज्ञात कीजिए । परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए ।

Find the maximum or minimum values of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$. Interpret the result geometrically. *20*

(c) (i) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. A के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Find the eigen values of A and the corresponding eigen vectors. *8*

(ii) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह के आइगेन मानों का निरपेक्ष मान 1 होता है ।

Prove that the eigen values of a unitary matrix have absolute value 1. *7*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

Q4. (a) (i) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$ के बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके स्पर्शी समतल, समतल $2x - y + 2z = 1$ के समांतर हैं ।

Find the co-ordinates of the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$, the tangent planes at which are parallel to the plane $2x - y + 2z = 1$. *10*

(ii) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु निरूपित करता है, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ हो तो ।

Prove that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$, represents a cone if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$. *10*

(b) दर्शाइए कि उद्गम (मूल-बिन्दु) से खींची हुई रेखाएँ, जो केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के समतल $lx + my + nz = p$ के साथ प्रतिच्छेदन बिन्दुओं पर लम्बों के समान्तर हैं, शंकु $p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2$ का जनन करती हैं ।

Show that the lines drawn from the origin parallel to the normals to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, at its points of intersection with the plane $lx + my + nz = p$ generate the cone

$$p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2.$$ *15*

(c) अतिपरवलयज के समतल $z = 0$ के द्वारा मुख्य दीर्घवृत्तीय खण्ड $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ के कोई बिन्दु $(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ में से दो जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equations of the two generating lines through any point $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$, of the principal elliptic section $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$, of the hyperboloid by the plane $z = 0$. *15*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड B

SECTION B

Q5. ***सभी*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) उचित ठहराइए कि

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0$$

की भांति अवकल समीकरण जहाँ कि $f(x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2)$ का एक स्वेच्छ फलन है, एक यथातथ अवकल समीकरण नहीं है तथा इसका $\frac{1}{x^2 + y^2}$ एक समाकलन गुणक है । अतएव इस अवकल समीकरण को $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$ के लिए हल कीजिए ।

Justify that a differential equation of the form :

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0,$$

where $f(x^2 + y^2)$ is an arbitrary function of $(x^2 + y^2)$, is not an exact differential equation and $\frac{1}{x^2 + y^2}$ is an integrating factor for it. Hence solve this differential equation for $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$. *10*

(b) वह वक्र ज्ञात कीजिए जिसके लिए कि स्पर्शी का भाग जो अक्षों द्वारा काटा हुआ है, स्पर्शी बिन्दु पर द्विभाजित हो ।

Find the curve for which the part of the tangent cut-off by the axes is bisected at the point of tangency. *10*

(c) एक कण एक सरल आवर्त गति (S.H.M.), केन्द्र O पर कालांक (आवर्तकाल) T, आयाम a के साथ प्रस्तुत कर रहा है तथा यह एक बिन्दु P से गुज़रता है, जहाँ कि OP = b, OP की दिशा में । सिद्ध कीजिए कि गुज़रा हुआ समय जब यह P पर वापस लौटता है, $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ है ।

A particle is performing a simple harmonic motion (S.H.M.) of period T about a centre O with amplitude a and it passes through a point P, where OP = b in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. *10*

www.prepp.in

(d) दो बराबर एकसमान दंड AB तथा AC, प्रत्येक l लंबे, A पर मुक्त रूप से जुड़े हैं तथा त्रिज्या r के चिकने नियत ऊर्ध्वाधर वृत्त पर टिके हैं । यदि दंडों के बीच कोण 2θ है, तो कल्पित कार्य सिद्धांत के प्रयोग से l, r तथा θ में संबंध ज्ञात कीजिए ।

Two equal uniform rods AB and AC, each of length l, are freely jointed at A and rest on a smooth fixed vertical circle of radius r. If 2θ is the angle between the rods, then find the relation between l, r and θ, by using the principle of virtual work. *10*

(e) वक्र $\bar{r}(t) = t\cos t\,\hat{i} + t\sin t\,\hat{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ के किसी भी बिन्दु पर वक्रता सदिश ज्ञात कीजिए । उसका परिमाण भी बताइए ।

Find the curvature vector at any point of the curve $\bar{r}(t) = t\cos t\,\hat{i} + t\sin t\,\hat{j},\ 0 \le t \le 2\pi$.
Give its magnitude also. *10*

Q6. (a) प्राचलों के विचरण की विधि के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

Solve by the method of variation of parameters : *10*

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

(b) अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 8y = 65\cos(\log_e x)$$

Solve the differential equation : *20*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 8y = 65\cos(\log_e x)$$

(c) स्टोक्स के प्रमेय के द्वारा मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_\Gamma (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

जहाँ Γ वक्र है $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0,\ x + y = 2a$, जो कि $(2a, 0, 0)$ से शुरू होता है और फिर z-समतल के नीचे से होकर जाता है ।

Evaluate by Stokes' theorem

$$\int_\Gamma (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

where Γ is the curve given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0,\ x + y = 2a$, starting from $(2a, 0, 0)$ and then going below the z-plane. *20*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

Q7. (a) निम्नलिखित अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x}$$

जबकि e^x इसके संगत समघात अवकल समीकरण का एक हल है ।

Solve the following differential equation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x},$$

when e^x is a solution to its corresponding homogeneous differential equation. *15*

(b) द्रव्यमान m का एक कण जो ऊर्ध्वाधर में एक स्थिर बिन्दु से एक हल्की अवितान्य (न खिंचने वाली) l लंबाई की डोरी से लटका हुआ है, को एक क्षैतिज आघात दिया जाता है जो कि उसको वेग $2\sqrt{gl}$ प्रदान करता है । कण का वेग तथा जब डोरी शैथिल्य हो जाए तब प्रारंभिक स्थान के स्तर से उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

A particle of mass m, hanging vertically from a fixed point by a light inextensible cord of length l, is struck by a horizontal blow which imparts to it a velocity $2\sqrt{gl}$. Find the velocity and height of the particle from the level of its initial position when the cord becomes slack. *15*

(c) एक सम पंचभुज (रेग्यूलर पैंटागन) ABCDE बराबर भारी एकसमान छड़ों को जोड़कर बनाया हुआ है, जोड़ A से लटक रहा है तथा BC एवं DE के मध्य बिन्दुओं को जोड़ते हुए एक हल्की छड़ के द्वारा वह अपने रूप में अनुरक्षित है । इस छड़ में प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

A regular pentagon ABCDE, formed of equal heavy uniform bars jointed together, is suspended from the joint A, and is maintained in form by a light rod joining the middle points of BC and DE. Find the stress in this rod. *20*

Q8. (a) अवकल समीकरण $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ के लिए पर्याप्त शर्त ज्ञात कीजिए ताकि उसका समाकलन गुणक, $(x + y)$ का फलन हो । उस दशा में समाकलन गुणक क्या होगा ? अतएव अवकल समीकरण $(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए तथा हल कीजिए ।

Find the sufficient condition for the differential equation $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ to have an integrating factor as a function of $(x + y)$. What will be the integrating factor in that case ? Hence find the integrating factor for the differential equation

$$(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0,$$

and solve it. *15*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(b) एक कण पर y-अक्ष के समांतर एक बल लगा हुआ है, जिसका त्वरण (सदैव x-अक्ष की ओर) μy^{-2} है तथा जब $y = a$ है, तब x-अक्ष के समांतर वेग $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$ से प्रक्षेपित है । कण के पथ का प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए । यहाँ μ एक अचर है ।

A particle is acted on by a force parallel to the axis of y whose acceleration (always towards the axis of x) is μy^{-2} and when $y = a$, it is projected parallel to the axis of x with velocity $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$. Find the parametric equation of the path of the particle. Here μ is a constant. *15*

(c) प्रारंभिक मान समस्या

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\, e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

को लाप्लास-रूपांतर के प्रयोग से हल कीजिए ।

Solve the initial value problem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\, e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

by using Laplace-transform. *20*