UPSC CSE 2014 MAINS PAPER 6 DECEMBER 19, 2014 STATISTICS OPTIONAL PAPER I QUESTION PAPER

CS (Main) Exam : 2014

सांख्यिकी

प्रश्न-पत्र—I

STATISTICS

Paper—I

निर्धारित समय : तीन घंटे Time Allowed : Three Hours	अधिकतम अंक : 250 Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू॰सी॰ए॰) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। उत्तर-पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **Two Sections** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खण्ड—अ

SECTION—A

Q. 1(a) यदि घटनाओं A और B के लिए, $P(A) > 0$ और $P(B) > 0$ हो, तो दर्शाइए कि $P(A \mid B) > P(A)$, यदि और केवल यदि $P(B \mid A) > P(B)$. इसी प्रकार, $P(A \mid B) < P(A)$ यदि और केवल यदि $P(B \mid A) < P(B)$.

If for the events A and B, $P(A) > 0$ and $P(B) > 0$ then show that $P(A \mid B) > P(A)$, if and only if $P(B \mid A) > P(B)$. Likewise, $P(A \mid B) < P(A)$, if and only if $P(B \mid A) < P(B)$. 10

Q. 1(b) तीन अंक 1, 2 और 3 यादृच्छिक क्रम में लिखे हुए हैं। इस बात की प्रायिकता क्या है कि कम से कम एक अंक अपने उचित स्थान पर होगा ?

Three digits 1, 2 and 3 are written down in random order. What is the probability that at least one digit will occupy its proper place ? 10

Q. 1(c) यदि $N(\mu, 4)$ से एक प्रेक्षित प्रतिदर्श –5, 0, 2, 15 हो, तो μ के लिए एक 95% विश्वास्यता अंतराल बनाइए।

Construct a 95% confidence interval for μ in $N(\mu, 4)$ from the following observed sample : –5, 0, 2, 15. 10

Q. 1(d) मान लीजिए कि X_1 और X_2 स्वतंत्र समान बंटन (आई आई डी) के यादृच्छिक चर हों, जिनका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right),\ x \geq 0,\ \theta > 0$$
$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

यदि $U_1 = 0.6\,X_1 + 0.4\,X_2$ और $U_2 = X_1 + X_2$, निर्णय लीजिए कि U_1 एवं U_2 में से कौनसा एक θ के लिए पर्याप्त प्रतिदर्शज है।

यदि $h(u_2) = E(U_1 \mid u_2)$, तो दर्शाइए कि $h(u_2)$ का प्रसरण U_1 के प्रसरण से छोटा होगा।

Let X_1 and X_2 be i.i.d. random variables and each has probability density function

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right),\ x \geq 0,\ \theta > 0$$
$$= 0, \text{ otherwise.}$$

If $U_1 = 0.6\,X_1 + 0.4\,X_2$ and $U_2 = X_1 + X_2$, decide which one of U_1 and U_2 are sufficient statistics for θ.

If $h(u_2) = E(U_1 \mid u_2)$, then show that it has smaller variance compared to $Var(U_1)$. 10

Q. 1(e) एक पर्यटक सैरगाह पर अनेक देशों से पर्यटक आते हैं। सैरगाह के प्रचालक के पास जनवरी, 2014 के महीने में निम्नलिखित आंकड़े हैं :

देश	यूएसए	यूके	कनाडा	इटली	जर्मनी	फ्रांस	जापान
पर्यटकों की संख्या	22	12	18	10	20	18	30

सैरगाह प्रचालक की परिकल्पना है कि किसी भी वर्ष की जनवरी में आने वाले पर्यटकों का अनुपात 2 : 1 : 2 : 1 : 2 : 2 : 3 है। इस परिकल्पना को 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए। (प्रदत्त $\chi^2_{6;\,0.05} = 12.59$)

A tourist resort is visited by tourists from many countries. The resort operator has the following data in the month of January, 2014 :

Country	USA	UK	Canada	Italy	Germany	France	Japan
No. of tourists	22	12	18	10	20	18	30

The resort operator has a hypothesis that the proportion of tourists visiting in the month of January of any year is 2 : 1 : 2 : 1 : 2 : 2 : 3. Test this hypothesis at 5% level of significance (Given $\chi^2_{6;\,0.05} = 12.59$). 10

Q. 2(a) यदि एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन

$$f_X(x) = 630x^4(1-x)^4, \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

हो तो इस बात की प्रायिकता मालूम कीजिए कि X माध्य और दो मानक विचलनों $(\mu \pm 2\sigma)$ के बीच होगा और इसकी तुलना चेबिचेव असमता द्वारा प्राप्त निम्न परिबंध से भी कीजिए।

The probability density function of a random variable X is given by

$$f_X(x) = 630x^4(1-x)^4 \text{ for } 0 < x < 1,$$
$$= 0, \text{ otherwise.}$$

Find the probability that X will take on a value within two standard deviations of the mean $(\mu \pm 2\sigma)$ and compare it with the lower bound provided by the Chebychev's Inequality. 20

Q. 2(b) यादृच्छिक चर X जिसका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f_X(x;\lambda) = e^{-x}\cdot\frac{x^{\lambda}}{\lambda!}, \quad x > 0$$
$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

हो, तो दर्शाइए कि

$$P_r\{0 < X < 2(\lambda+1)\} > \frac{\lambda}{\lambda+1} \text{ होगा,}$$

जहाँ $\lambda \geq 0$ एक पूर्णांक है।

For a random variable X with probability density function

$$f_X(x;\lambda) = e^{-x} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!} \text{ for } x > 0,$$

$$= 0, \text{ otherwise;}$$

where $\lambda \geq 0$ is an integer, show that

$$P_r\{0 < X < 2(\lambda+1)\} > \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$ 15

Q. 2(c) एक पांसा (die) को 15 बार उछाला जाता है जिससे निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं :

फलक मान :	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता :	0	1	4	0	4	6

डाई अनभिनत है अथवा नहीं है, की जांच करने के लिए कौल्मोगारोफ-स्मिरनौफ प्रतिदर्शज का इस्तेमाल कीजिए। (दिया है $D_{15;\ 0.05} = 0.304$)

A die is rolled 15 times with the following results :

Face value :	1	2	3	4	5	6
Frequency :	0	1	4	0	4	6

Use Kolmogorov-Smirnov statistic to test whether the die is unbiased or not. (Given $D_{15;\ 0.05} = 0.304$) 15

Q. 3(a) मान लीजिए कि एक ही समय में n मदों का परीक्षण किया जा रहा है और वह परीक्षण तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि r मदें विफल न हो जांय। चरघातांकी विफलता बंटन की कल्पना करते हुए जिसका माध्य जीवनकाल θ हो, θ के लिए अधिकतम संभावित आकलक प्राप्त कीजिए और अतएव $P(X \geq t)$ को आकलित कीजिए। इसके साथ प्राचल θ के संबंध में फिशर अवगम (फिशर इंफोर्मेशन) प्राप्त कीजिए और दर्शाइए कि आकलक उपगामी प्रसामान्य है।

Suppose n items are put on test simultaneously and the test is continued until r items fail. Assuming an exponential failure distribution with mean life time θ, obtain the maximum likelihood estimator for θ and hence estimate $P(X \geq t)$. Also obtain the Fisher information about the parameter θ and show that the estimator is asymptotically normal. 20

Q. 3(b) मान लीजिए $X \sim N(\mu, 1)$ और μ का पूर्व बंटन $N(0, 1)$ है। वर्गित त्रुटि हानि फलन की कल्पना करते हुए, μ के लिए बेज आकलक प्राप्त कीजिए। इसके साथ बेज़ जोखिम भी प्राप्त कीजिए।

Let $X \sim N(\mu, 1)$ and the prior distribution of μ is $N(0, 1)$. Assuming squared error loss function, obtain the Bayes estimator for μ. Also obtain Bayes risk. 15

Q. 3(c) यादृच्छिक चरों के एक अनुक्रम की प्रायिकता में अभिसरण और वंटन में अभिसरण को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि यदि X_n का X में प्रायिकता में अभिसरण हो तो वंटन में भी होगा। क्या इसका विलोम भी सही है ?

Define convergence in probability and convergence in distribution of a sequence of random variables. Show that convergence of X_n to X in probability implies convergence of X_n to X in distribution. Is the converse also true ? 15

Q. 4(a) मान लीजिए $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ एक एकसमान वंटन $U(0, \theta)$ से प्राप्त एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$ के परीक्षण के लिए आमाप α का एक एकसमानतः शक्ततम परीक्षण (UMP) परीक्षण प्राप्त कीजिए।

Let $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ be a random sample drawn from a uniform $U(0, \theta)$ distribution. Obtain a UMP test of size α for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta \neq \theta_0$. 20

Q. 4(b) निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध कीजिए :

(i) अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) हमेशा प्रायिकता एक के साथ समाप्त होता है।

(ii) SPRT में $Z = \log \dfrac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}$ जहाँ $P_r\{|Z| > 0 | H\} > 0$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$E_H\{e^{tS_N}[M(t)]^{-N}\} = 1 \text{ जबकि } S_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i .$$

Prove the following results :

(i) A sequential probability ratio test (SPRT) always terminates with probability one.

(ii) For a SPRT with $Z = \log \dfrac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}$ such that $P_r\{|Z| > 0 | H\} > 0$, then prove that

$$E_H\{e^{tS_N}[M(t)]^{-N}\} = 1 \text{ when } S_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i .$$ 15

Q. 4(c) X और Y का प्रायिकता फलन

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0(1)\,n;$$

$$P(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}, y = r, r+1, \ldots\ldots$$

हो तो सिद्ध कीजिए $P[X \geq r] = P[Y \leq n]$.

Let the probability function of X and Y be

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x},\ x=0(1)\,n;$$

$$P(Y=y)=\binom{y-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{y-r},\ y=r, r+1, \ldots\ldots.$$

Prove that $P[X \geq r] = P[Y \leq n]$. 15

खण्ड—ब

SECTION—B

Q. 5(a) यदि Y_1, Y_2, Y_3 तीन स्वतंत्र प्रेक्षणों की प्रत्याशाएं

$E(Y_1) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$, $E(Y_2) = \beta_0 - 2\beta_2$,

$E(Y_3) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ और $V(Y_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, 3$ के लिए

हों तो β_0, β_1 और β_2 के लिए न्यूनतम वर्ग आकलक प्राप्त कीजिए। क्या आप σ^2 का अनभिनत आकलक प्राप्त कर सकते हैं ? अपने दावे के पक्ष में दलीलें दीजिए।

Let Y_1, Y_2, Y_3 be three independent observations having expectations

$E(Y_1) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$, $E(Y_2) = \beta_0 - 2\beta_2$,

$E(Y_3) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ and $V(Y_i) = \sigma^2$ for $i = 1, 2, 3$.

Obtain least square estimates of β_0, β_1 and β_2. Can you obtain unbiased estimate of σ^2 ? Justify your claim. 10

Q. 5(b) यदि π_1 और π_2 दो द्विचर प्रसामान्य समष्टियों को निरूपित करते हों जहाँ $\pi_1 \sim N_2(\mu_1, \Sigma)$ और $\pi_2 \sim N_2(\mu_2, \Sigma)$, $\mu'_1 = [10, 15]$, $\mu_2 = [10, 25]$ और $\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 32 \end{pmatrix}$ हों, तो π_1 और π_2 के बीच महलोनोबिस दूरी का परिकलन कीजिए।

If π_1 and π_2 denote two bivariate normal populations where $\pi_1 \sim N_2(\mu_1, \Sigma)$ and $\pi_2 \sim N_2(\mu_2, \Sigma)$, $\mu'_1 = [10, 15]$, $\mu_2 = [10, 25]$ and $\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 32 \end{pmatrix}$. Compute the Mahalonobis distance between π_1 and π_2. 10

Q. 5(c) समष्टि आमाप 10 के लिए, दर्शाइए कि प्रतिस्थापन बिना सरल यादृच्छिक प्रतिचयन (SRS) में 5वें 'ड्रा' में विशिष्ट इकाई की प्राप्ति की प्रायिकता उतनी ही है जितनी कि पहले 'ड्रा' में प्राप्ति की प्रायिकता है।

For a population size 10, show that in SRS without replacement the probability of drawing a specified unit at 5^{th} draw is equal to the probability of drawing it at the first draw. 10

Q. 5(d) मान लीजिए कि 5 खंडकों में व्यवस्थित 4 उपचारों सहित एक यादृच्छिकीकृत खंडक अभिकल्पना (आर.बी.डी.) है। दर्शाइए कि आर.बी.डी. लांबिक है।

Consider a RBD with 4 treatments arranged in 5 blocks. Show that RBD is orthogonal. 10

Q. 5(e) यदि X_1, X_2, X_3, X_4 और X_5 एक स्वतंत्र और सर्वसमान बंटित यादृच्छिक सदिश हों, जिनके माध्य सदिश μ और सहप्रसरण आव्यूह Σ हों, तो $Y = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + X_5$ का बंटन मालूम कीजिए।

Let X_1, X_2, X_3, X_4 and X_5 be independent and identically distributed random vectors with mean vector μ and covariance matrix Σ. Find the distribution of $Y = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + X_5$. 10

Q. 6(a) मान लीजिए $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, जहाँ

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)}_{q\times 1} \\ X^{(2)}_{p-q\times 1} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)}_{q\times 1} \\ \mu^{(2)}_{p-q\times 1} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

तो $X^{(1)}$ के सप्रतिबंध बंटन को ज्ञात कीजिए यदि $X^{(2)} = x^{(2)}$ दिया हो।

Let $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, where

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)}_{q\times 1} \\ X^{(2)}_{p-q\times 1} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)}_{q\times 1} \\ \mu^{(2)}_{p-q\times 1} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Obtain the conditional distribution of $X^{(1)}$ given $X^{(2)} = x^{(2)}$. 20

Q. 6(b) मान लीजिए कि 11 गांवों में से 44 समूहों (गुच्छों) के एक प्रतिदर्श जिसमें गेहूँ बोया गया हो को लिया जाना है। 11 गांवों में से प्रत्येक से चार समूह (गुच्छे) चुने गए थे और प्रत्येक समूह (गुच्छे) में 8 क्रमागत सर्वेक्षण संख्याएं (क्षेत्र) हैं। यहाँ गांवों के बीच के कारण वर्ग योग (SS) 2000 है। गांवों के भीतर समूहों (गुच्छों) के बीच के कारण का SS 8250 है और कुल SS 30000 है तो एनोवा सारणी (ANOVA table) लिखिए।

Consider the area under wheat for a sample of 44 clusters selected from 11 different villages. Four clusters were selected from each of the 11 villages and each cluster consists of 8 consecutive survey numbers (fields). Here sum of squares (SS) due to between villages is 2000, SS due to between clusters within villages is 8250 and Total SS is 30000. Write the ANOVA table. 15

Q. 6(c) आमाप 5 की एक लैटिन वर्ग अभिकल्पना (एल.एस.डी.) बनाइए। इस एल.एस.डी. से एक स्तंभ निकाल दीजिए। सिद्ध कीजिए कि परिणामी डिज़ाइन, $v = b = 5, r = k = 4$ और $\lambda = 3$ प्राचलों सहित एक संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (बी.आई.बी.डी.) होगी।

Construct an LSD of size 5. Delete one column from this LSD. Prove that the resulting design is a symmetrical BIBD with parameters $v = b = 5$, $r = k = 4$ and $\lambda = 3$. 15

Q. 7(a) हौरविट्ज़-थाम्पसन (HT) के समष्टि माध्य आकलक का वर्णन कीजिए। दर्शाइए कि HT आकलक समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक है।

Explain Horvitz-Thomson estimator of the population mean. Show that H-T estimator is unbiased estimator of population mean. Also obtain its variance. 20

Q. 7(b) होटलिंग T^2 को परिभाषित कीजिए। इसके अनुप्रयोगों में से किसी एक को बताइए।

एक द्विचर प्रसामान्य वंटन $N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ से आमाप 3 के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श ने $\underline{\mu}$ और Σ के निम्नलिखित अनभिनत आकलन दिए

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

परिकल्पना $H_o : \underline{\mu} = \underline{\mu}_o = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ का परीक्षण करने के लिए T^2-प्रतिदर्शज का परिकलन कीजिए।

Define Hotelling T^2. State any one of its applications.

A random sample of size 3 from a bivariate normal $N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ distribution gave following unbiased estimates of $\underline{\mu}$ and Σ

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Compute T^2-statistic to test the hypothesis $H_o : \underline{\mu} = \underline{\mu}_o = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. 15

Q. 7(c) केवल उपयुक्त अन्योन्यक्रियाओं को चुनने के द्वारा, 2^7 संकरित बहुउपादानी प्रयोग के एक मुख्य खण्ड का आमाप 8 के खण्ड का निर्माण कीजिए। सभी स्वतंत्र और व्यापकीकृत संकरित अन्योन्यक्रियाएं लिखिए। इसके उपरांत मुख्य खण्ड का इस्तेमाल करते हुए दो या अधिक खण्ड प्राप्त कीजिए।

Construct a key block of 2^7 confounded factorial experiment into a block of size 8 by choosing suitable interactions only. Write all the independent and generalized confounded interactions. Further obtain two or more blocks using key block. 15

Q. 8(a) यदि प्राचल $v = 11 = b, r = k = 5$ और $\lambda = 2$ के साथ एक संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (BIBD) हो तो इस डिजाइन का c आव्यूह और इसका अशून्य आइगन मान प्राप्त कीजिए। अतएव,

$$v(\hat{t}_i - \hat{t}_m), i \neq m = 1, \ldots\ldots, 11.$$

ज्ञात कीजिए।

Consider a BIBD with parameters $v = 11 = b$, $r = k = 5$ and $\lambda = 2$. Obtain c matrix of this design and its non-zero eigen value. Hence obtain

$$v(\hat{t}_i - \hat{t}_m), i \neq m = 1, \ldots\ldots, 11.$$ 20

Q. 8(b) एक कालिज के 200 लड़कों और 100 लड़कियों ने एक परीक्षा दी। उनके द्वारा प्राप्त अंकों के माध्य और प्रसरण निम्नलिखित के अनुसार हैं :

श्रेणी	छात्रों की संख्या N_i	माध्य अंक $\bar{Y}_{N_i}$	प्रसरण $\sigma^2_{N_i}$
लड़के	200	40	10
लड़कियां	100	50	20

आनुपातिक नियतन का इस्तेमाल करते हुए आमाप 30 का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श आप किस प्रकार निकालेंगे ? अतएव समष्टि माध्य के आकलक का प्रसरण प्राप्त कीजिए।

200 boys and 100 girls of a college appeared in an examination. Means and variances of their scores are as given below :

Category	No. of Students N_i	Mean Marks $\bar{Y}_{N_i}$	Variance $\sigma^2_{N_i}$
Boys	200	40	10
Girls	100	50	20

How will you draw a random sample of size 30 using proportional allocation ? Hence obtain the variance of the estimator of the population mean. 15

Q. 8(c) गौस-मार्कोव व्यवस्था $(Y, X\beta, \sigma^2 I)$ में एक न्यूनतम वर्ग आकलक :

$$X' \times \hat{\beta} = X'Y$$

के हल के द्वारा प्राप्त होता है।

(i) उपरोक्त कथन को सही सिद्ध कीजिए।

(ii) स्थापित कीजिए कि समीकरणों का उपरोक्त तंत्र हमेशा संगत होता है।

In the Gauss-Markov set up $(Y, X\beta, \sigma^2 I)$ a least square estimate is given by a solution of the system :

$$X' \times \hat{\beta} = X'Y$$

(i) Justify the above statement.

(ii) Establish that the above system of equations is always consistent. 15