

# हल प्रश्न-पत्र 2011

## प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक भर्ती परीक्षा (गणित)

दिनांक 16-06-2016

- यदि  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$  तथा  $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$  एक-दूसरे के कोणार्धक हैं, तब :  
 (a)  $p + q = 1$  (b)  $pq = 1$   
 (c)  $pq + 1 = 0$  (d)  $p^2 + pq + q^2 = 0$
- किसी त्रिभुज के शीर्ष  $(0, 3)$ ,  $(-3, 0)$  तथा  $(3, 0)$  हैं, तो लम्ब-केन्द्र के निर्देशांक होंगे :  
 (a)  $(0, -2)$  (b)  $(0, 2)$  (c)  $(0, 3)$  (d)  $(0, -3)$
- रेखा  $4x - 5y + 8 = 0$  पर बिन्दु  $(2, 3)$  से डाले गए लम्ब के पाद के निर्देशांक होंगे :  
 (a)  $(0, 0)$  (b)  $(1, 1)$   
 (c)  $(\frac{41}{78}, \frac{128}{75})$  (d)  $(\frac{78}{41}, \frac{128}{41})$
- बिन्दु  $(2, -3)$  से वृत्त  $2x^2 + 2y^2 = 1$  के स्पर्शों की लम्बाई है :  
 (a) 5 (b) -5  
 (c)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  (d)  $-\frac{5}{\sqrt{2}}$
- दो वृत्त  $x^2 + y^2 = r^2$  तथा  $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ , एक-दूसरे को वास्तविक तथा भिन्न बिन्दुओं पर काटेंगे, यदि  $r$  का मान है :  
 (a)  $2 < r < 8$  (b)  $r = 2$  या  $r = 8$   
 (c)  $r < 2$  या  $r < 8$  (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि परवलय  $y^2 - kx + 8 = 0$  की नियता  $x - 1 = 0$  है, तब  $k$  का मान है :  
 (a)  $\frac{1}{6}$  (b) 8 (c) 4 (d)  $\frac{1}{4}$
- परवलय  $y^2 = 4x$  की सभी जीवाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दु पथ, यदि जीवाएँ शीर्ष से खींची गयी हैं, है :  
 (a)  $y^2 = 8x$  (b)  $y^2 = 2x$   
 (c)  $x^2 + 4y^2 = 16$  (d)  $x^2 = 2y$
- समीकरण  $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-6} + 1 = 0$  दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगा, यदि :  
 (a)  $r > 2$  (b)  $r > 6$   
 (c)  $2 < r < 6$  (d) इनमें से कोई नहीं
- रेखा  $lx + my + n = 0$  दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर अभिलम्ब है, यदि :  
 (a)  $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$   
 (b)  $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$   
 (c)  $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$   
 (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं
- यदि दो शांकवों  $S_1$  तथा  $S_2$  की उत्केन्द्रताएँ  $e_1$  तथा  $e_2$  हैं, तथा  $e_1^2 + e_2^2 = 3$ , तब दोनों  $S_1$  तथा  $S_2$  होंगे :  
 (a) दीर्घ वृत्त (b) परवलय  
 (c) अतिपरवलय (d) वृत्त
- अतिपरवलय  $x^2 - y^2 = 3$  के किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा, दी गई रेखा  $2x + y + 8 = 0$  के समान्तर होगी?  
 (a)  $(2, 1)$  या  $(1, 2)$  (b)  $(2, -1)$  या  $(-2, 1)$   
 (c)  $(-1, -2)$  (d)  $(-2, -1)$
- समी.  $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ , ( $a \neq 0$ ) एक गोला प्रदर्शित करेगी यदि :  
 (a)  $u^2 + v^2 + w^2 - d \geq 0$   
 (b)  $u^2 + v^2 + w^2 - ad \geq 0$   
 (c)  $u^2 + v^2 + w^2 - d \leq 0$   
 (d)  $u^2 + v^2 + w^2 - ad \leq 0$
- तीनों कार्तीय अक्षों तथा रेखाओं  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ ,  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  से गुजरने वाले शंकु की समीकरण है :  
 (a)  $yz - 2zx + 3xy = 0$   
 (b)  $3yz - zx + xy = 0$   
 (c)  $3yz + 16zx + 15xy = 0$   
 (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं
- निम्न में से कौन-सा युग्म समान शांकवों को निरूपित करेगा?  
 (a)  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ,  $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$   
 (b)  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ,  $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$   
 (c)  $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ ,  $\frac{l}{r} = -1 - e \cos \theta$   
 (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

15. समतल  $2x - 2y + z + 12 = 0$ , गोला  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$  को निम्न बिन्दुओं पर स्पर्श करेगा :  
 (a)  $(1, -4, -2)$  (b)  $(-1, 4, -2)$   
 (c)  $(-1, -4, 2)$  (d)  $(1, 4, -2)$
16. यदि  $f(a) = 2$ ,  $f'(a) = 1$ ,  $g(a) = -1$ ,  $g'(a) = 2$ , तब  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a}$  का मान होगा :  
 (a)  $-5$  (b)  $\frac{1}{5}$   
 (c)  $5$  (d)  $0$
17. यदि  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ , तब  $\frac{dy}{dx} =$   
 (a)  $1$  (b)  $\frac{1}{xy}$   
 (c)  $\frac{1}{2y - x}$  (d)  $\frac{1}{2y - 1}$
18. यदि  $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 \sin x \cos x \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$ , जहाँ  $p$  एक नियतांक है, तब  $x = 0$  पर  $\frac{d^3}{dx^3} (f(x))$  का मान है :  
 (a)  $p$  (b)  $p + p^2$   
 (c)  $p + p^3$  (d)  $p$  से स्वतन्त्र
19. दिए गए वक्र का अभिलम्ब  $x$ -अक्ष के समान्तर है यदि :  
 (a)  $\frac{dy}{dx} = 0$  (b)  $\frac{dy}{dx} = 1$   
 (c)  $\frac{dx}{dy} = 0$  (d)  $\frac{dx}{dy} = 1$
20. वक्र  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$  का महत्तम ढाल है :  
 (a)  $0$  (b)  $12$  (c)  $16$  (d)  $32$
21. यदि फलन  $f(x) = x^{1/x}$ ,  $x > 0$  का मान  $x = e$  पर महत्तम है, तब :  
 (a)  $e^\pi > \pi^e$  (b)  $e^\pi < \pi^e$   
 (c)  $e^\pi = \pi^e$  (d)  $e^\pi \leq \pi^e$
22.  $\int \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx$  का मान है :  
 (a)  $\log \tan x + c$  (b)  $e^x \tan \frac{x}{2} + c$   
 (c)  $\sin \log x + c$  (d)  $e^x \cot x + c$
23. यदि  $\int \frac{dx}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)} = \frac{A}{\tan \frac{x}{2} - 1} + B \tan^{-1}(f(x)) + c$ , तब :  
 (a)  $A = \frac{1}{5}$ ,  $B = -\frac{2}{5\sqrt{15}}$ ,  $f(x) = \frac{4 \tan x + 3}{\sqrt{15}}$   
 (b)  $A = \frac{-1}{5}$ ,  $B = \frac{1}{\sqrt{15}}$ ,  $f(x) = \frac{4 \tan(\frac{x}{2}) + 1}{\sqrt{15}}$   
 (c)  $A = \frac{2}{5}$ ,  $B = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$ ,  $f(x) = \frac{4 \tan x + 1}{\sqrt{5}}$   
 (d)  $A = \frac{2}{5}$ ,  $B = -\frac{2}{\sqrt{15}}$ ,  $f(x) = \frac{4 \tan(\frac{x}{2}) + 1}{\sqrt{5}}$
24.  $|x|$  का समाकलन यदि  $x < 0$ , है :  
 (a)  $\frac{x^2}{2} + c$  (b)  $-\frac{x^2}{2} + c$   
 (c)  $x + c$  (d)  $-x + c$
25. समाकलन  $\int_0^{1.5} [x^2] dx$  का मान है (जबकि  $[x]$  एक महत्तम पूर्णांक है  $\leq x$ ) :  
 (a)  $2 + \sqrt{2}$  (b)  $2 - \sqrt{2}$   
 (c)  $0$  (d) इनमें से कोई नहीं
26. यदि  $f: R \rightarrow R$  तथा  $g: R \rightarrow R$  सतत् फलन है, तब  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x) + f(-x)][g(x) - g(-x)] dx$  का मान है :  
 (a)  $\pi$  (b)  $1$  (c)  $-1$  (d)  $0$
27. यदि  $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , तब  $a_2 + a_4$ ,  $a_3 + a_5$  तथा  $a_4 + a_6$  निम्न में होंगे :  
 (a) स. श्रे. में (b) गु. श्रे. में  
 (c) ह. श्रे. में (d) इनमें से कोई नहीं
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} e^{r/n}$  का मान है :  
 (a)  $e$  (b)  $e - 1$  (c)  $1 - e$  (d)  $e + 1$
29.  $x$ -अक्ष से ऊपर, वक्र  $y^2(2a - x) = x^3$  तथा रेखा  $x = 2a$  के बीच घिरा क्षेत्रफल है :  
 (a)  $\pi a^2$  (b)  $\frac{3\pi a^2}{2}$   
 (c)  $2\pi a^2$  (d)  $3\pi a^2$
30.  $x = 0$  तथा  $x = 4$  के मध्य घिरा, चाप  $y = \sqrt{1 + x^2}$  को  $x$ -अक्ष के परितः घुमाने से जनित आयतन है :  
 (a)  $\frac{8\pi}{3}$  (b)  $\frac{49\pi}{3}$  (c)  $\frac{65\pi}{3}$  (d)  $\frac{76\pi}{3}$
31. अवकल समीकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$  की कोटि है :  
 (a)  $1$  (b)  $2$   
 (c)  $3$  (d) इनमें से कोई नहीं
32. अवकल समीकरण  $2x \frac{dy}{dx} - y = 3$  के हल से प्रदर्शित वक्र है :  
 (a) सरल रेखा (b) वृत्त  
 (c) परवलय (d) दीर्घवृत्त
33. अवकल समीकरण  $\tan y \sec^2 x dx + \tan x \sec^2 y dy = 0$  का हल है :  
 (a)  $\tan x + \tan y = k$  (b)  $\tan x - \tan y = k$   
 (c)  $\frac{\tan x}{\tan y} = k$  (d)  $\tan x \cdot \tan y = k$
34. यदि समीकरण  $x(1 - x^2) dy + (2x^2 y - y - ax^3) dx = 0$  का अवकल गुणनखण्ड (I.F.)  $e^{\int p dx}$  है, तब  $p$  का मान है :  
 (a)  $\frac{2x^2 - ax^3}{x(1 - x^2)}$  (b)  $2x^3 - 1$   
 (c)  $\frac{2x^2 - 1}{ax^3}$  (d)  $\frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)}$

35. अवकल समीकरण  $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$  का हल है :

- (a)  $y - \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$  (b)  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$   
(c)  $x + \sqrt{x^2 + y^2} = cy^2$  (d)  $x - \sqrt{x^2 + y^2} = cy^2$

36. दो सदिश  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  इस प्रकार हैं कि  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ , तब दोनों सदिशों के बीच का कोण होगा :

- (a)  $\frac{\pi}{4}$  (b)  $\frac{\pi}{3}$   
(c)  $\frac{\pi}{2}$  (d) इनमें से कोई नहीं

37. सदिश  $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  का सदिश  $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$  पर प्रक्षेप (Projection) है :

- (a)  $\frac{5\sqrt{5}}{19}$  (b)  $2\frac{1}{9}$   
(c)  $\frac{9}{19}$  (d)  $\frac{\sqrt{6}}{19}$

38. सदिश  $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$  तथा  $2\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$  एक समतलीय हैं, तब  $\lambda$  का मान है :

- (a) -2 (b) 0  
(c) 1 (d) -1

39. यदि दो इकाई सदिश  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$ , x-अक्ष से क्रमशः  $30^\circ$  तथा  $120^\circ$  का कोण बनाते हैं, तब  $|\vec{a} + \vec{b}|$  का मान होगा :

- (a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  (b)  $\sqrt{2}$   
(c)  $\sqrt{3}$  (d) 2

40.  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot [\vec{b} - \vec{c}] \times (\vec{c} - \vec{a})$  का मान है :

- (a) 0 (b)  $2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$   
(c)  $3[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  (d) इनमें से कोई नहीं

41. सदिश  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  $\lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ ,  $-3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$  संरेख हो, तो  $\lambda$  का मान होगा :

- (a) 3 (b) 4  
(c) 5 (d) 6

42. बल  $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$  द्वारा चलित वस्तु पर सदिश  $\vec{d} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$  के सापेक्ष गतिमान करने में किया गया कार्य है :

- (a) 12 इकाई (b) 11 इकाई  
(c) 10 इकाई (d) 9 इकाई

43. बिन्दु  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  के परितः तथा बिन्दु  $(-2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$  पर कार्यरत बल  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  द्वारा उत्पन्न आपूर्ण है :

- (a)  $3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$  (b)  $3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$   
(c)  $3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$  (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि  $\Delta ABC$  का अन्तःकेन्द्र I है तथा भुजाओं BC, CA तथा AB की लम्बाइयाँ क्रमशः a, b, c हों, तो  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}$  का मान होगा :

- (a)  $\vec{0}$  (b)  $\vec{AB}$   
(c)  $\vec{AC}$  (d)  $\vec{AD}$

45. बल युग्म  $\vec{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  तथा  $-\vec{F}$  द्वारा क्रमशः बिन्दुओं  $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  तथा  $2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$  पर कार्यरत आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए :

- (a)  $2\sqrt{5}$  (b)  $3\sqrt{5}$   
(c)  $4\sqrt{5}$  (d)  $5\sqrt{5}$

46. यदि  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , तब श्रेणी  $\sum a_n$  है :

- (a) आन्दोलित (कम्पित)  
(b) अपसारी  
(c) अभिसारी  
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

47. श्रेणी  $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots$  है :

- (a) अभिसारी (b) अपसारी  
(c) आन्दोलित (कम्पित) (d) इनमें से कोई नहीं

48. धनात्मक पदों की श्रेणी  $\sum u_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_n + 1} > 1$  या  $< 1$  के अनुसार

अभिसारी या अपसारी होगी। इस प्रयोग का नाम है :

- (a) तुलनात्मक जाँच (b) रेबी की जाँच  
(c) डी एलम्बर्ट की जाँच (d) कोशी की संघनित जाँच

49. प्रत्येक कोशी श्रेणी है :

- (a) अपरिबद्ध (b) परिबद्ध  
(c) अनन्त (d) इनमें से कोई नहीं

50. 'प्रत्येक परिबद्ध श्रेणी में एक केन्द्रिक बिन्दु होता है' यह कथन : जाना जाता है

- (a) कोशी का प्रमेय (b) विस्ट्रास का प्रमेय  
(c) बोलजेनो-विस्ट्रास प्रमेय (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि  $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ab + cd)x + c^2 + d^2 = 0$  कोई वास्तविक मूल नहीं रखता है, तब :

- (a)  $ad = bc$  (b)  $ab = cd$   
(c)  $ac = bd$  (d)  $ad \neq bc$

52. यदि  $\log_{10}(x^2 - 6x + 45) = 2$ , तब x के मान होंगे :

- (a) 6, 9 (b) 9, -5  
(c) 10, 5 (d) 11, -5

53. प्रत्येक प्रतिबद्ध अनुक्रम में है :

- (a) एक अपसारी उप-अनुक्रम  
(b) एक अभिसारी उप-अनुक्रम  
(c) एक अपसारी अनुक्रम  
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

54. श्रेणी  $\sum \left(\frac{1}{np}\right)$  अपसारी है, यदि :

- (a)  $p \geq 1$  (b)  $p < 1$   
(c)  $p \leq 1$  (d) इनमें से कोई नहीं

55. श्रेणी  $\sum u_n$  के अभिसारी होने की आवश्यक शर्त है कि :

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \rightarrow 0$  (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$   
(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1$  (d) इनमें से कोई नहीं

56. एक समतल के एक बिन्दु पर तीन बल लगे हैं।  $P$  तथा  $Q$  के मध्य कोण  $150^\circ$  तथा  $Q, R$  के मध्य कोण  $120^\circ$  हैं। सन्तुलन की स्थिति में बल  $P, Q, R$  में अनुपात होगा :
- (a)  $1:2:3$  (b)  $1:2:\sqrt{3}$   
(c)  $3:2:1$  (d)  $\sqrt{3}:2:1$
57. दो समान बलों का परिणामी उनमें से किसी एक के बराबर है। बलों के बीच का कोण है :
- (a)  $45^\circ$  (b)  $60^\circ$   
(c)  $90^\circ$  (d)  $120^\circ$
58. त्रिभुज  $ABC$  की भुजाओं  $BC, CA$  तथा  $AB$  के सापेक्ष लगे बलों का परिणामी त्रिभुज के परिवृत्त के केन्द्र से गुजरता है, तब :
- (a)  $P\sin A + Q\sin B + R\sin C = 0$   
(b)  $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$   
(c)  $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$   
(d)  $P\tan A + Q\tan B + R\tan C = 0$
59. समान पदार्थ के बने क्रमशः 6 सेमी तथा 3 सेमी त्रिज्या वाले दो एकसमान गोलों को एक साथ जोड़ दिया गया है। पूरे निकाय का गुरुत्व केन्द्र बड़े गोले के केन्द्र से कितनी दूरी पर होगा?
- (a) 1 सेमी (b) 3 सेमी  
(c) 2 सेमी (d) 4 सेमी
60.  $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$  का मान होगा :
- (a) 1 (b) 0  
(c) -1 (d) 67
61. दो बिन्दु  $A$  तथा  $B$  को क्रमशः 5 मी तथा 20 मी की ऊँचाई से छोड़ा गया है। तब  $A$  द्वारा जमीन पर पहुँचने में लिया गया समय तथा  $B$  द्वारा जमीन पर पहुँचने में लिया गया समय में अनुपात है :
- (a)  $1:4$  (b)  $2:1$   
(c)  $1:2$  (d)  $1:1$
62. एक व्यक्ति एक लिफ्ट में खड़ा है, जो कि ' $f$ ' त्वरण से ऊपर की ओर जा रही है। व्यक्ति भारी महसूस होगा :
- (a) वास्तविक भार का  $(f+g)$  गुना  
(b) वास्तविक भार का  $(f-g)$  गुना  
(c) वास्तविक भार का  $(fg)$  गुना  
(d) वास्तविक भार का  $\frac{f}{g}$  गुना
63. एक कोण को क्षैतिज से  $45^\circ$  का कोण बनाते हुए  $49\sqrt{2}$  मी/से की गति से प्रक्षेपित किया जाता है। यह प्रक्षेप की दिशा से समकोणिक दिशा कितने समय बाद होगा?
- (a)  $10\sqrt{2}$  सेकण्ड (b) 10 सेकण्ड  
(c) 8 सेकण्ड (d) 5 सेकण्ड
64. एक कण विराम से चलता है तथा नियत त्वरण से चलता है।  $m$  वें तथा  $(m+1)$  वें सेकण्ड में गतिज ऊर्जाओं में वृद्धि का अनुपात होगा :
- (a)  $m:m$  (b)  $(m+1):(m-1)$   
(c)  $2m-1:2m+1$  (d) इनमें से कोई नहीं
65. यदि  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  इकाई सदिश हों और  $\theta$  उनके बीच का कोण हो, तो  $\left| \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \right|$  है :
- (a)  $\sin \frac{\theta}{2}$  (b)  $\sin \theta$   
(c)  $2\sin \theta$  (d)  $\sin 2\theta$
66.  $A$  तथा  $B$  एक काम को 12 दिनों में,  $B$  तथा  $C$  15 दिनों में तथा  $C$  व  $A$  20 दिनों में कर सकते हैं।  $A$  अकेला कितने दिनों में उसी काम को करेगा?
- (a)  $15\frac{2}{3}$  (b) 24  
(c) 30 (d) 40
67. एक व्यक्ति प्रथम 50 किमी, 25 किमी/घण्टे की चाल से, अगले 40 किमी, 20 किमी/घण्टा से तथा अंतिम 90 किमी, 15 किमी/घण्टा की चाल से चलता है। पूरी यात्रा की उसकी औसत चाल होगी :
- (a) 25 (b) 20  
(c) 18 (d) 40
68. एक धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में दोगुना हो जाता है। यह 8 गुना हो जाएगा :
- (a) 30 वर्षों में (b) 40 वर्षों में  
(c) 45 वर्षों में (d) 60 वर्षों में
69.  $(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)(\log_8 9)$  का मान है :
- (a) 2 (b) 7 (c) 8 (d) 33
70. समी.  $3x - 4y = 5$  तथा  $12x - 16y = 20$  में हल होंगे :
- (a) कोई उभयनिष्ठ हल नहीं (b) केवल एक उभयनिष्ठ हल  
(c) केवल दो उभयनिष्ठ हल (d) दो से ज्यादा उभयनिष्ठ हल
71. ₹ 53 को  $A, B, C$  में इस प्रकार विभाजित किया गया कि  $A$  को  $B$  से ₹ 7 ज्यादा,  $B$  को  $C$  से ₹ 8 ज्यादा प्राप्त हों। उसके हिस्सों में अनुपात होगा :
- (a)  $16:9:18$  (b)  $25:18:10$   
(c)  $18:25:10$  (d)  $15:8:30$
72. समी.  $x^2 + px + q = 0$  के मूल 1 तथा 2 हैं, तो समी.  $qx^2 - px + 1 = 0$  के मूल होंगे :
- (a)  $1, \frac{1}{2}$  (b)  $-\frac{1}{2}, -1$   
(c)  $-\frac{1}{2}, 1$  (d)  $-1, \frac{1}{2}$
73. किसी त्रिभुज के अन्तःवृत्त का केन्द्र ज्ञात करते हैं :
- (a) अभिलम्बों से (b) कोणों के अर्धकों से  
(c) माध्यिकाओं से (d) भुजाओं के लम्बार्धकों से
74. यदि  $ABC$  एक समद्विबाहु त्रिभुज है तथा बिन्दु  $A$  से आधार पर स्थित बिन्दु  $D$  पर लम्ब  $AD$  डाला गया है, तब :
- (a)  $AB^2 - AD^2 = BD \cdot DC$   
(b)  $AB^2 + AD^2 = BD \cdot DC$   
(c)  $AB^2 - AD^2 = BD^2 - DC^2$   
(d)  $AB^2 + AD^2 = BC^2 - DC^2$

## हल प्रश्न-पत्र - 2011

5

75. किसी समषट्भुज के अन्तर्गत बने वृत्त की त्रिज्या  $r$  है, तब इसका परिमाप होगा :

- (a)  $6r$  (b)  $3r$   
(c)  $9r$  (d)  $12r$

76. निम्न में से कौन-सी केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है?

- (a) माध्य (b) माध्यिका  
(c) बहुलक (d) मानक विचलन

77.  $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$  के प्रसार में,  $x^n$  का गुणांक होगा :

- (a)  $\frac{3^{n+1}-1}{2 \cdot 3^{n+1}}$  (b)  $\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}$   
(c)  $2\left(\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}\right)$  (d) इनमें से कोई नहीं

78. 1, 3, 4, 5, 7, 4 का माध्य  $m$  है। नम्बर 3, 2, 2, 4, 3, 3,  $p$  का माध्य  $m-1$  और माध्यिका  $q$  है, तब  $p+q =$

- (a) 4 (b) 5  
(c) 6 (d) 7

79. यदि  $a^x = b^y = c^z$  और  $b^2 = ac$ , तब  $y =$

- (a)  $\frac{xz}{x+y}$  (b)  $\frac{xz}{2(x-z)}$   
(c)  $\frac{xz}{2(z-x)}$  (d)  $\frac{2xz}{z+x}$

80. किसी बंटन का बहुलक ज्ञात किया जा सकता है :

- (a) आयत चित्र द्वारा  
(b) 'से कम' संचयी बारम्बारता वक्र द्वारा  
(c) 'से अधिक' संचयी बारम्बारता वक्र द्वारा  
(d) आवृत्ति बहुभुज द्वारा

81. निम्न सारणी से 250 व 300 के मध्य के आँकड़े ज्ञात कीजिए :

| मान               | 200 से अधिक | 250 से अधिक | 300 से अधिक | 350 से अधिक |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| आँकड़ों की संख्या | 56          | 38          | 15          | 0           |
| (a) 56            | (b) 23      |             |             |             |
| (c) 15            | (d) 8       |             |             |             |

82. विभिन्न धनात्मक मानों के समुच्चय के लिए निम्न में से सत्य है :

- (a)  $AM \geq GM \geq HM$  (b)  $HM \geq GM \geq AM$   
(c)  $AM > GM > HM$  (d)  $GM > AM > HM$

83. कीमत आधारित जीवन सूचकांक (C.L.I.) को प्रदर्शित किया जाता है :

- (a)  $\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$  (b)  $\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}$   
(c)  $\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_n} \times 100$  (d) इनमें से कोई नहीं

84. यदि 30 व 20 आकार के दो नमूनों का माध्य क्रमशः 55 व 60 तथा मानक विचलन क्रमशः 16 व 25 है, तब सभी 50 आकार के नमूनों का एक साथ मानक विचलन है :

- (a) 5.00 (b) 5.06  
(c) 5.23 (d) इनमें से कोई नहीं

85. यदि  $P + \sqrt{3}Q + \sqrt{5}R + \sqrt{15}S = \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ , तब  $P$  का मान है :

- (a)  $\frac{7}{11}$  (b)  $\frac{3}{11}$  (c)  $-\frac{1}{11}$  (d)  $-\frac{2}{11}$

86. एक विषम-सममित आव्यूह का क्रम (Rank) नहीं हो सकती है :

- (a) 1 (b) 2  
(c) 3 (d) 6

87. दो आव्यूह  $A$  तथा  $B$  विपरीत क्रम (anti-commute) होंगी, यदि :

- (a)  $AB = BA$  (b)  $AB^2 = A^2B$   
(c)  $AB = -BA$  (d)  $\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

88. निम्न में से सत्य कथन है :

- (a) यदि  $A$  त्रिभुजाकार है, तब  $A^{-1}$  भी त्रिभुजाकार आव्यूह होगी  
(b) यदि  $A$  कोई भी आव्यूह है, तब  $\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)$   
(c) यदि  $A$  तथा  $B$ ,  $n$  घात की वर्ग आव्यूह है, तब  $\text{adj}(AB) = (\text{adj } A)(\text{adj } B)$   
(d) उपर्युक्त सभी असत्य हैं

89. यदि  $3 \times 3$  आव्यूह के प्रत्येक अवयव को 3 से गुणा कर दें, तब नयी आव्यूह की सारणिक होगी :

- (a)  $3(\det A)$  (b)  $9(\det A)$   
(c)  $27(\det A)$  (d)  $(\det A)^3$

90. यदि समीकरणों के निकाय  $x + 2y - 3z = 2$ ,  $(k+3)z = 3$ ,  $(2k+1)y + z = 2$  का हल है, तब  $k$  का मान है :

- (a) -3 (b)  $-\frac{1}{2}$  (c) 1 (d) 2

91. श्रेणी  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{15}} + \dots$  के  $n$  पदों का योग है :

- (a)  $\frac{\sqrt{3+4n} + \sqrt{3}}{n}$  (b)  $\frac{n}{\sqrt{3+4n} + \sqrt{3}}$   
(c)  $\sqrt{3+4n} + \sqrt{3}$  (d)  $\frac{1}{\sqrt{3+4n} + \sqrt{3}}$

92. एक समिति के 5 पुरुष व 2 महिलाओं को एक गोल मेज पर बैठाने के प्रकार होंगे, (यदि दोनों महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठें) :

- (a) 480 (b) 600  
(c) 720 (d) 840

93. यदि  $a_n = \sum_{r=0}^n \frac{1}{{}^nC_r}$ , तब  $\sum_{r=0}^n \frac{r}{{}^nC_r}$  का मान है :

- (a)  $(n-1)a_n$  (b)  $na_n$   
(c)  $\frac{na_n}{2}$  (d) इनमें से कोई नहीं

94. श्रेणी  $1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots$  का योगफल है :

- (a)  $5e - 1$  (b)  $5e - 3$   
(c)  $4e$  (d) इनमें से कोई नहीं

95. किसी समस्या को हल करने का अनुपात  $A$  के पक्ष में 3:4 तथा  $B$  के विपक्ष में 5:7 है। यदि  $A$  तथा  $B$  दोनों समस्या हल करने का प्रयास करें, तो समस्या हल होने की प्रायिकता होगी :

- (a)  $\frac{41}{84}$  (b)  $\frac{16}{21}$  (c)  $\frac{5}{21}$  (d)  $\frac{1}{4}$

96. आव्यूह समीकरण  $AB = AC$  से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं, कि  $B = C$  यदि :

- (a)  $|A| = 0$  (b)  $|A| \neq 0$   
(c)  $A$  सममित है (d)  $A$  वर्ग आव्यूह है

97. यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ , तब  $A$  है :

- (a) निलपोटेन्ट आव्यूह (b) आईडेम्पोटेन्ट आव्यूह  
(c) अदिश आव्यूह (d) इनमें से कोई नहीं

98. यदि सारणिक  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$ , तब  $\Delta$  का वर्ग अन्तराल

होगा :

- (a)  $[3, 4]$  (b)  $[2, 4]$   
(c)  $[1, 4]$  (d) इनमें से कोई नहीं

99. सारणिक  $\begin{vmatrix} xp+y & x & y \\ yp+z & y & z \\ 0 & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$ , यदि :

- (a)  $x, y, z$  स. श्रे. में हैं  
(b)  $x, y, z$  गु. श्रे. में हैं  
(c)  $x, y, z$  ह. श्रे. में हैं  
(d)  $xy, yz, zx$  स. श्रे. में हैं

100. शतरंज के बोर्ड पर आयतों की संख्या होगी :

- (a) 144 (b) 1296  
(c) 256 (d) इनमें से कोई नहीं

101. त्रिभुज  $ABC$  में,  $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$  का मान है :

- (a) 0 (b)  $rR$   
(c)  $Rr^2$  (d)  $a+b+c$

102. यदि  $u = \log \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$ , तब  $\cosh u$  का मान होगा :

- (a)  $\sec\theta$  (b)  $\sin\theta$   
(c)  $\cos\theta$  (d) इनमें से कोई नहीं

103.  $\sinh^{-1} 3$  का मान है :

- (a)  $\log(3 + \sqrt{10})$  (b)  $\log(3 - 2\sqrt{2})$   
(c)  $\log(3 + 2\sqrt{2})$  (d) इसमें से कोई नहीं

104.  $[\sqrt{-6}\sqrt{-6}]$  का मान है :

- (a) 6 (b) -6  
(c)  $6i$  (d)  $-6i$

105. यदि  $\alpha$  तथा  $\beta$  विभिन्न सम्मिश्र संख्या हैं, तथा  $|\beta| = 1$ , तब  $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|$

का मान होगा :

- (a) 0 (b)  $\frac{1}{2}$   
(c) 1 (d) 2

106. यदि  $z$  एक सम्मिश्र संख्या है, जो  $z^2 + z + 1 = 0$  को सन्तुष्ट करता है। यदि  $n, 3$  का गुणक नहीं है, तो  $z^n + z^{2n}$  का मान है :

- (a) 2 (b) -2  
(c) 0 (d) -1

107.  $|z-1| = |z+i|$  से प्राप्त बिन्दु पथ है :

- (a) त्रिज्या 1 इकाई का वृत्त  
(b)  $(1, 0)$  तथा  $(0, -1)$  के फोकस वाला दीर्घवृत्त  
(c) मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा  
(d)  $(1, 0), (0, 1)$  को मिलाने वाले व्यास का वृत्त

108. यदि  $x$ , समीकरण  $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$  को सन्तुष्ट करता है, तब  $x^n + \frac{1}{x^n}$  का मान है :

- (a)  $2^n \cos n\theta$  (b)  $2^n \cos^n \theta$   
(c)  $2 \cos n\theta$  (d)  $2 \cos^n \theta$

109. इकाई के  $n$ वें मूल होंगे :

- (a) स. श्रे. में (b) गु. श्रे. में  
(c) ह. श्रे. में (d) इनमें से कोई नहीं

110. यदि सम्मिश्र तल में स्थित, त्रिभुज के शीर्षों  $z, z+iz$  तथा  $iz$  से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल 50 है, तब  $|z|$  का मान है :

- (a) 1 (b) 5  
(c) 10 (d) 100

111.  $x^2 - y^2 - 9z^2 + 6yz$  के गुणनखण्ड हैं :

- (a)  $(x+y-3z)(x+y+3z)$   
(b)  $(x-y-3z)(x-y+2z)$   
(c)  $(x+y-3z)(x-y+3z)$   
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

112. यदि  $A:B = 7:9$  और  $B:C = 5:4$  तब  $A:B:C$  है :

- (a) 7:45:36  
(b) 35:45:36  
(c) 28:36:35  
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

113. फलन  $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \sin^{-1} \left( \frac{1+x^2}{2x} \right)$  परिभाषित है, यदि :

- (a)  $x \in \{-1, 1\}$  (b)  $x \in [-1, 1]$   
(c)  $x \in R$  (d)  $x \in (-1, 1)$

114.  $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}$  का वास्तविक भाग है :

- (a) 0 (b) 4  
(c) -2 (d) इनमें से कोई नहीं

115. यदि  $x \sin \theta = y \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) = z \sin \left( \theta + \frac{4\pi}{3} \right)$ , तब  $xy + yz + zx$  का मान है :

- (a) 1 (b)  $\frac{1}{2}$   
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

116. वर्ग अन्तराल  $[-\pi, \pi]$  में समीकरण  $1 + \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = 0$  के

वास्तविक हलों की संख्या है :

- (a) 0 (b) 1  
(c) 2 (d) 3

## हल प्रश्न-पत्र - 2011

7

117.  $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$  का मान है :

- (a)  $\frac{\pi}{2}$  (b)  $\frac{5\pi}{3}$   
(c)  $\frac{10\pi}{3}$  (d) 0

118. यदि त्रिभुज ABC में  $\frac{2\cos A}{a} + \frac{2\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$ , तब कोण A का मान होगा :

- (a)  $\frac{\pi}{3}$  (b)  $\frac{\pi}{4}$  (c)  $\frac{\pi}{2}$  (d)  $\frac{\pi}{6}$

119. त्रिभुज ABC में  $a = 5, b = 7, \sin A = \frac{3}{4}$ , तब बनने वाले त्रिभुजों की संख्या होगी :

- (a) केवल एक त्रिभुज (b) दो त्रिभुज  
(c) अनन्त त्रिभुज (d) कोई त्रिभुज नहीं

120. यदि  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ , तब  $\frac{a+b+c}{c}$  का मान होगा :

- (a)  $\frac{7}{3}$  (b)  $\frac{2}{7}$   
(c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{1}{7}$

121. पूर्णाकों के समूह  $(Z, *)$  में,  $a * b = a + b + 1$  जबकि  $a, b \in Z$ , तब -2 का प्रतिलोम होगा :

- (a) -2 (b) 0  
(c) -4 (d) 2

122. किसी समूह  $(G, *)$  का उपसमुच्चय H एक समूह होगा, यदि और केवल यदि :

- (a)  $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$  (b)  $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$   
(c)  $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$  (d) H में इकाई अवयव है

123. किसी समूह में, अनुचित उपसमूहों की संख्या है :

- (a) 2 (b) 3  
(c) समूह पर निर्भर (d) 1

124. किसी परिमित चक्रीय समूह (कोटि 28) में जनितों की संख्या होगी :

- (a) 10 (b) 8  
(c) 12 (d) 14

125. किसी समुच्चय A में R सम्बन्ध इस प्रकार है कि  $R = R^{-1}$ , तब R है :

- (a) स्वतुल्य (b) सममित  
(c) संक्रमक (d) उपर्युक्त में से कोई नही

## उत्तरमाला

|          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (c)   | 2. (c)   | 3. (d)   | 4. (c)   | 5. (a)   | 6. (c)   | 7. (b)   | 8. (c)   | 9. (b)   | 10. (c)  |
| 11. (b)  | 12. (b)  | 13. (d)  | 14. (b)  | 15. (b)  | 16. (d)  | 17. (d)  | 18. (d)  | 19. (c)  | 20. (b)  |
| 21. (d)  | 22. (b)  | 23. (c)  | 24. (b)  | 25. (b)  | 26. (d)  | 27. (c)  | 28. (b)  | 29. (b)  | 30. (d)  |
| 31. (d)  | 32. (a)  | 33. (d)  | 34. (d)  | 35. (b)  | 36. (c)  | 37. (b)  | 38. (a)  | 39. (b)  | 40. (a)  |
| 41. (a)  | 42. (d)  | 43. (b)  | 44. (d)  | 45. (d)  | 46. (c)  | 47. (a)  | 48. (c)  | 49. (b)  | 50. (c)  |
| 51. (d)  | 52. (d)  | 53. (b)  | 54. (c)  | 55. (b)  | 56. (d)  | 57. (d)  | 58. (b)  | 59. (a)  | 60. (b)  |
| 61. (c)  | 62. (b)  | 63. (b)  | 64. (c)  | 65. (a)  | 66. (c)  | 67. (c)  | 68. (c)  | 69. (a)  | 70. (a)  |
| 71. (b)  | 72. (b)  | 73. (b)  | 74. (a)  | 75. (d)  | 76. (d)  | 77. (a)  | 78. (d)  | 79. (d)  | 80. (a)  |
| 81. (b)  | 82. (c)  | 83. (a)  | 84. (b)  | 85. (c)  | 86. (a)  | 87. (c)  | 88. (a)  | 89. (c)  | 90. (a)  |
| 91. (b)  | 92. (a)  | 93. (c)  | 94. (d)  | 95. (d)  | 96. (a)  | 97. (d)  | 98. (b)  | 99. (b)  | 100. (b) |
| 101. (d) | 102. (a) | 103. (a) | 104. (b) | 105. (c) | 106. (d) | 107. (a) | 108. (a) | 109. (b) | 110. (c) |
| 111. (c) | 112. (b) | 113. (d) | 114. (a) | 115. (a) | 116. (a) | 117. (d) | 118. (c) | 119. (d) | 120. (b) |
| 121. (b) | 122. (a) | 123. (a) | 124. (d) | 125. (d) |          |          |          |          |          |

## संकेत एवं हल

1. रेखाओं  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ , के कोणार्धों का समीकरण निम्न है :

$$\frac{x^2 - y^2}{1 - (-1)} = \frac{xy}{-p}$$

या

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{-xy}{p}$$

या

$$px^2 + 2xy - py^2 = 0 \quad \dots(i)$$

अतः समी. (i),  $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$  के समान होगी। अतः समीकरण की तुलना करने पर

$$\frac{p}{1} = \frac{2}{-2q} = \frac{-p}{-1}$$

 $\therefore$ 

$$pq + 1 = 0$$

3. दिया गया समीकरण  $4x - 5y + 8 = 0$  ...(i)

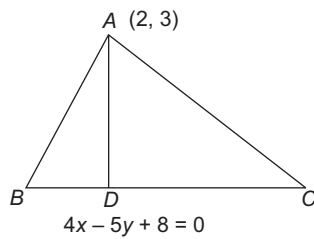
तब

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}$$

 $\therefore$ 

$$BC \text{ की प्रवणता} = \frac{4}{5}$$

लम्ब AD की प्रवणता =  $\frac{-5}{4}$



अतः लम्ब AD का समीकरण

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-5}{4}$$

$$\Rightarrow 5x + 5y = 22 \quad \dots(ii)$$

$\therefore$  बिन्दु D,  $4x - 5y = -8$  तथा  $5x + 4y = 22$  का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

अतः समी. (i) व समी. (ii) से,

$$x = \frac{78}{41}, y = \frac{128}{41}$$

अतः लम्ब के पाद के निर्देशांक =  $\left(\frac{78}{41}, \frac{128}{41}\right)$

4. बिन्दु  $(2, -3)$  से वृत्त  $2x^2 + 2y^2 = 1$  के स्पर्शी की लम्बाई

$$= \sqrt{S_1}$$

यहाँ  $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}$  तथा  $x_1 = 2, y_1 = -3$

$$\therefore \sqrt{S_1} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{13 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26-1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

5. दिया गया समीकरण निम्न है :

$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$$

केन्द्र =  $(-g, -f)$

$$= (5, 0)$$

तथा त्रिज्या =  $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{25 - 16} = 3$$

$\therefore$  पहला वृत्त दूसरे वृत्त को काटेगा, यदि

$$2 < r < 8$$

$\therefore$  वृत्त का केन्द्र  $(0, 0)$  है

6. समीकरण  $y^2 - kx + 8 = 0$

या  $y^2 = kx - 8$

या  $y^2 = 4\left(\frac{k}{4}x - 2\right)$

समी.  $y^2 = 4ax$  से तुलना करने पर

$$a = 1, X = \frac{k}{4}x - 2$$

अतः नियता का समीकरण

$$X = -1$$

$$\frac{k}{4}x - 2 = -1$$

या  $\frac{kx}{4} = 1$

या  $\frac{k}{4}x - 1 = 0$

नियता के दिए गए समीकरण  $x - 1 = 0$  से,

$$\frac{k}{4} = 1$$

$$k = 4$$

7. परवलय  $y^2 = 4x$  की, सभी शीर्ष से खींची गई जीवाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी एक परवलय होगा। जिसके नाभिलम्ब की लम्बाई दिए गए परवलय के नाभिलम्ब की आधी होगी। अतः बिन्दु पथ  $\Rightarrow y^2 = 2x$

8.  $\frac{x^2}{2-r} + \frac{y^2}{r-6} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{r-2} + \frac{y^2}{6-r} = 1$$

यह समीकरण एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करेगी, यदि

$$r-2 > 0 \text{ तथा } 6-r > 0$$

$$\Rightarrow r > 2 \text{ तथा } 6 > r$$

$$\therefore 2 < r < 6$$

9. यदि रेखा  $lx + my + n = 0$ , बिन्दु  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  पर दीर्घवृत्त पर अभिलम्ब है, तब इस बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण निम्न होगा

$$ax \sec \theta - by \csc \theta = a^2 - b^2$$

$\therefore lx + my + n = 0$  से तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा-

$$\frac{a \sec \theta}{l} = -\frac{b \csc \theta}{m} = \frac{a^2 - b^2}{-n}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{an}{l(a^2 - b^2)} \text{ तथा } \sin \theta = \frac{bm}{m(a^2 - b^2)}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करके जोड़ने पर

या  $\frac{a^2 n^2}{l^2 (a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2 m^2}{m^2 (a^2 - b^2)^2} = 1$

या  $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$

10. दिया है,  $e_1^2 + e_2^2 = 3$

अतः  $e_1 > 1$  तथा  $e_2 > 1$

$\therefore$  दोनों शांकव  $S_1$  एवं  $S_2$  अतिपरवलय होंगे।

11. स्पर्श बिन्दु =  $\left(\pm \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}}\right)$

यहाँ  $a^2 = 3, b^2 = 3$  एवं  $m = -2$

## हल प्रश्न-पत्र - 2011

9

$$\therefore \left( \pm \frac{3 \times (-2)}{\sqrt{3 \times 4 - 3}}, \pm \frac{3}{\sqrt{3 \times 4 - 3}} \right) = \left( \pm \frac{(-6)}{3}, \pm \frac{3}{3} \right)$$

अतः अभीष्ट बिन्दु  $(2, -1)$  या  $(-2, 1)$  होंगे।

12. दिया है समी.  $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2u}{a}x + \frac{2v}{a}y + \frac{2w}{a}z + \frac{d}{a} = 0$$

$$\therefore \text{त्रिज्या } (r) = \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a}\right)^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 - \frac{d}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2 - da}{a^2}}$$

$$\therefore \text{गोले की त्रिज्या} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2 - da}{a^2}} \geq 0$$

$$\text{या } u^2 + v^2 + w^2 - da \geq 0$$

13. हम जानते हैं कि तीनों अक्षों से होकर जाने वाली शंकु का समीकरण निम्न है

$$fyz + gzx + hxy = 0 \quad \dots(i)$$

यह शंकु  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  व  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  से होकर जाता है।

$$\therefore -6x + 3g - 2h = 0 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा } -f + 3g - 3h = 0 \quad \dots(iii)$$

समी. (ii) व (iii) से

$$\frac{f}{-3} = \frac{g}{16} = \frac{h}{-15}$$

अतः समी. (i) से

$$-3yz + 16zx - 15xy = 0$$

$$\Rightarrow 3yz - 16zx + 15xy = 0$$

14. माना समान शांकव केन्द्र को निरूपित करने वाली समीकरण निम्न है।

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta \quad \dots(ii)$$

माना  $P(r_1, \theta_1)$  शांकव (i) पर कोई बिन्दु है ताकि

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \dots(iii)$$

$P$  के निर्देशांकों को  $(-r_1, \theta_1 + \pi)$  के रूप में भी लिखा जा सकता है। ये निर्देशांक समी. (ii) को सन्तुष्ट करेगी यदि

$$\frac{l}{-r_1} = -1 + e \cos(\theta_1 + \pi)$$

$$\Rightarrow \frac{-l}{r_1} = -1 - e \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow \frac{l}{r_1} = 1 + e \cos \theta_1$$

जोकि सम्बन्ध समी. (iii) से सत्य है। इस प्रकार समी. (i) का प्रत्येक बिन्दु (ii) पर स्थित है। अतः समी. (i) व (ii) समान शांकव को निरूपित करेगी।

15. गोले  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ , के केन्द्र बिन्दु के निर्देशांक  $(1, 2, -1)$  हैं तब,

$\therefore$  बिन्दु  $(1, 2, -1)$  से समतल  $2x - 2y + z + 12 = 0$  पर डाले गए लम्ब का समीकरण इस प्रकार

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1} = \lambda$$

बिन्दु  $(x, y, z) = (2\lambda + 1, -2\lambda + 2, \lambda - 1)$  को समतल के समीकरण में रखने पर,

$$2(2\lambda + 1) - 2(-2\lambda + 2) + \lambda - 1 + 12 = 0$$

$$\text{या } 9\lambda + 9 = 0$$

$$\text{या } \lambda = -1$$

अतः स्पर्श बिन्दु  $(-1, 4, -2)$  प्राप्त होता है।

17. यदि  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$

$$\text{तब } y = \sqrt{x + y}$$

$$\text{या } y^2 = x + y$$

$$\text{या } 2y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\text{या } (2y - 1) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\text{तब } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2y - 1)}$$

18.  $f(x) = \begin{vmatrix} x^n & \sin x & \cos x \\ n! & \sin \frac{n\pi}{2} & \cos \frac{n\pi}{2} \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} (f(x)) = \begin{vmatrix} n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \\ n! & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$$

$n = 3$  रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{d^3}{dx^3} (f(x)) = \begin{vmatrix} 6 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ 6 \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$$

$x = 0$  रखने पर,

10

हल प्रश्न-पत्र - 2011

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d^3}{dx^2}(f(x)) \right\}_{x=0} = \begin{vmatrix} 6 \sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \\ 6 \sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \\ \rho \quad \rho^2 \quad \rho^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ \rho & \rho^2 & \rho^3 \end{vmatrix} = 0$$

अतः  $x = 0$  पर,  $\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$  का मान  $\rho$  से स्वतन्त्र है।

19. हमें ज्ञात है कि अभिलम्ब की प्रवणता = 0

$$\therefore \frac{-dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0$$

20. समी.  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$  से

$$\text{प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 9$$

$$\text{पुनः} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\therefore \text{वक्र का महत्तम ढाल} = -3(1)^2 + 6(1) + 9 \\ = -3 + 6 + 9 \\ = 12$$

$$\begin{aligned} 22. I &= \int e^x \left\{ \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right\} dx \\ &= \int e^x \left\{ \frac{1}{2\cos^2(x/2)} + \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)} \right\} dx \\ &= \int e^x \left\{ \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx, \quad \text{जहाँ } f(x) = \tan \frac{x}{2}$$

$$= e^x f(x) + c = e^x \tan(x/2) + c$$

$$23. I = \int \frac{1}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{\frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} - 1} - \frac{1}{\frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} + 4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \left( \frac{1 + \tan^2 x/2}{2 \tan x/2 - 1 - \tan^2 x/2} - \frac{1 + \tan^2 x/2}{4 + 4 \tan^2 x/2 + 2 \tan x/2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \left( \frac{\sec^2 x/2}{-(\tan x/2 - 1)^2} \right) dx$$

$$- \frac{1}{5} \int \frac{\sec^2 x/2}{4 + 4 \tan^2 x/2 + 2 \tan x/2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$\text{माना } I_1 = \frac{-1}{5} \int \frac{\sec^2 x/2 - 1}{(\tan x/2 - 1)^2} dx$$

$$\text{पुनः माना } \tan x/2 - 1 = t$$

$$\Rightarrow \sec^2 x/2 \cdot \frac{1}{2} dx = dt$$

$$\Rightarrow \sec^2 x/2 dx = 2dt$$

$$\therefore I_1 = \frac{-2}{5} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{t} + c_1$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(\tan x/2 - 1)} + c_1$$

$$\text{तथा } I_2 = \frac{-1}{5} \int \frac{\sec^2 x/2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(2 \tan x/2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$$

$$\text{माना } 2 \tan x/2 + \frac{1}{2} = t_1$$

$$\Rightarrow \sec^2 x/2 \cdot \frac{dx}{2} = dt_1$$

$$\Rightarrow \sec^2 x/2 dx = dt_1$$

$$\therefore I_2 = \frac{-1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + t_1^2} dt_1$$

$$= \frac{-1}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \left( \frac{t_1}{\sqrt{15}/2} \right) + c_2$$

$$= \frac{-2}{5\sqrt{15}} \tan^{-1} \left( \frac{4 \tan x/2 + 1}{\sqrt{15}} \right) + c_2$$

$$\text{तब } I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(\tan x/2 - 1)} - \frac{2}{5\sqrt{15}} \tan^{-1} \left( \frac{4 \tan x/2 + 1}{\sqrt{15}} \right) + c$$

$$\text{परन्तु } I = \frac{A}{\tan x/2 - 1} + B \tan^{-1}(f(x)) + c$$

$$\text{अतः } A = \frac{2}{5}, B = -\frac{2}{5\sqrt{15}} \text{ तथा } f(x) = \frac{4 \tan x/2 + 1}{\sqrt{15}}$$

$$24. I = \int |x| dx, \text{ जहाँ } x < 0$$

$$\therefore I = \int -x dx$$

$$= -\int x dx$$

$$I = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$25. \int_0^{1.5} [x^2] dx = \int_0^1 [x^2] dx + \int_1^{\sqrt{2}} [x^2] dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} [x^2] dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{1.5} [x^2] dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 \cdot dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{1.5} [x^2] dx = 0 + (\sqrt{2} - 1) + 2(1.5 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$$

## हल प्रश्न-पत्र - 2011

11

26.  $[f(x) + f(-x)]$  एक सम फलन है तथा  $[g(x) - g(-x)]$  एक विषम फलन है, तब  $\{f(x) + f(-x)\} \cdot \{g(x) - g(-x)\}$  एक विषम फलन होगा।

$$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x) + f(-x)][g(x) - g(-x)] dx = 0$$

27.  $\therefore a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$

$$\begin{aligned} \therefore a_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \cdot \tan^2 x dx \\ &= a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \tan^n x \tan^n x dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \tan^n x dx \\ &= \left[ \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/4} \\ \Rightarrow a_n + a_{n+2} &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_2 + a_4 = \frac{1}{2+1}, a_3 + a_5 = \frac{1}{3+1}, a_4 + a_6 = \frac{1}{4+1}$$

$$= \frac{1}{3} \quad = \frac{1}{4} \quad = \frac{1}{5}$$

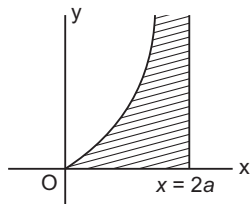
अतः स्पष्ट है कि  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$  घनात्मक श्रेणी में है। तब

$a_2 + a_4, a_3 + a_5$  तथा  $a_4 + a_6$  घनात्मक श्रेणी में होंगे।

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{e^{r/n}} = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

29. वक्र के समीकरण  $y^2(2a - x) = x^3$  से स्पष्ट है कि यह x-अक्ष के परितः सममित है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है।

अब  $\frac{x^3}{2a - x} < 0$  जब  $x > 2a$  या  $x < 0$



अतः वक्र  $x > 2a$  व  $x < 0$  में अस्तित्व नहीं रखता है, केवल वक्र पूर्णतः  $0 < x < 2a$  में अस्तित्व रखता है।

$$\therefore \text{धिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \int_0^{2a} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}} dx = 8a^2 \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{3\pi a^2}{2}$$

31. अवकल समीकरण की कोटि ज्ञात नहीं की जा सकती है; क्योंकि समीकरण सभी अवकलन गुणांकों में बहुपद नहीं है।

32. दी गई अवकल समीकरण निम्न है :

$$2x \frac{dy}{dx} - y = 3 \Rightarrow 2x \frac{dy}{dx} = y + 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y+3} dy = \frac{dx}{2x}$$

$$\Rightarrow \log(y+3) = \log 2x + \log c$$

$$\Rightarrow y + 3 = 2xc$$

$\therefore$  उपरोक्त से स्पष्ट है कि वक्र सरल रेखा होगी।

33.  $\tan y \sec^2 x dx + \tan x \sec^2 y dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = -\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$$

$$\log(\tan x) + c = -\log(\tan y) + c$$

$$\Rightarrow \log(\tan x \cdot \tan y) = \log k$$

$$\therefore \tan x \cdot \tan y = k$$

34.  $x(1-x^2)dy + (2x^2y - y - ax^3)dx = 0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{fx} + \frac{(2x^2-1)y}{x(1-x^2)} = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

यह  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ , प्रकार का अवकलन समीकरण है। इस समीकरण

तुलना करने पर,

$$P = \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}$$

35.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

$\therefore$  यह एक सजातीय अवकलन समीकरण है। अतः

$$y = vx \text{ तथा } \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v + x \frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1+v^2}$$

$$\text{या } x \frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\text{या } \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{या } \log[v + \sqrt{1+v^2}] = \log x + \log c$$

$$\text{या } v + \sqrt{1+v^2} = cx$$

$$\text{या } y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

36.  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$

$$a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$$

37.  $\vec{a} = \hat{j} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = 4\hat{j} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 1 - 2 \times (-4) + 7 \times 1 = 4 + 8 + 7 = 19$$

12

हल प्रश्न-पत्र - 2011

$$|\vec{b}| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

$$\therefore \text{प्रक्षेप} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}$$

38. चूंकि तीनों सदिश एकसमतलीय हैं, अतः

$$\begin{vmatrix} \lambda & +1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{या } \lambda[\lambda^2 - 1] - 1[\lambda + 2] + 2[-1 - 2\lambda] = 0$$

$$\text{या } \lambda^3 - \lambda - \lambda - 2 - 2 - 4\lambda = 0$$

$$\text{या } -\lambda^3 - 6\lambda - 4 = 0$$

$$\text{या } \lambda = -2$$

39.  $\therefore \vec{a}$  और  $\vec{b}$  के बीच का कोण  $90^\circ$  है,

$$\therefore |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1 + 1 + 0$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$40. (\vec{a} - \vec{b}) \cdot [(\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = [(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})]$$

$$\text{माना } \alpha = \vec{a} - \vec{b} + 0, \beta = 0 + \vec{a} - \vec{c} \text{ तथा } \gamma = -\vec{a} + 0 + \vec{c}$$

$$\therefore [\alpha \beta \gamma] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$$

$$= 0 \times [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$$

$$41. \text{ माना } \vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{Q} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\text{तथा } \vec{R} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\therefore \text{तीनों सदिश संरेख हैं। अतः } \vec{PQ} = t\vec{QR}$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} = t[-(3 + \lambda)\hat{i} - 6\hat{j} - 12\hat{k}]$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1 + 3t + t\lambda)\hat{i} + (2 + 6t)\hat{j} + (4 + 12t)\hat{k} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \text{ एकसमतलीय नहीं हैं।}$$

$$\therefore (\lambda - 1 + 3t + t\lambda) = 0, 2 + 6t = 0, 4 + 12t = 0$$

$$\text{या } 2 + 6t = 0$$

$$\text{या } t = \frac{-1}{3}$$

$$\text{तथा } \lambda - 1 + 3 \times \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$42. \text{ किया गया कार्य } W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$= 6 - 2 + 5 = 9 \text{ इकाई}$$

$$43. \vec{F} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{P} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}, \vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r} = \vec{OP} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1 + 2) - \hat{j}(-3 + 2) + \hat{k}(-3 - 1)$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$45. \text{ यदि } \vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} \text{ तब}$$

$$\vec{r} = \vec{BA} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = -6\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\therefore \text{बलयुग्म का आघूर्ण} = |\vec{M}| = \sqrt{36 + 25 + 64} = 5\sqrt{5}$$

51.  $\therefore$  दी गई समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

$$\{2(ab + cd)\}^2 - 4 \times (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) < 0$$

$$\Rightarrow 4 \left\{ \begin{matrix} a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 \\ -b^2d^2 \end{matrix} \right\} < 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 - 2abcd > 0$$

$$\Rightarrow (ab - bc)^2 > 0$$

$$\Rightarrow ab > bc$$

$$\Rightarrow ad \neq bc$$

$$52. \text{ यदि } \log_{10}(x^2 - 6x + 45) = 2\log_{10} 10$$

$$\text{तब } x^2 - 6x + 45 = 100$$

$$\text{या } x^2 - 6x - 55 = 0$$

$$\text{या } (x - 11)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 11, -5$$

56. लामी की प्रमेय से

$$\frac{P}{\sin 120^\circ} = \frac{Q}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{\sin 150^\circ}$$

$$\frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P : Q : R = \sqrt{3} : 2 : 1$$

$$57. \text{ दो समान बलों का परिणामी } R = 2P \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{चूंकि } R = P$$

अतः  $P = 2P \cos \frac{\alpha}{2}$

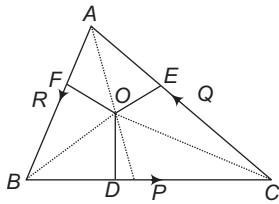
$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

या  $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos 60^\circ$

या  $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$

$$\alpha = 120^\circ$$

58. त्रिभुज ABC निम्न प्रकार है।



माना O,  $\Delta ABC$  का परिकेन्द्र है, तो  $OA = OB = OC =$  त्रिज्या O से BC, CA और AB पर क्रमशः OD, DE और OF लम्ब डाले

$$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 2A$$

$$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = A$$

$\Delta ODB$  में,  $OD = OB \cdot \cos \angle BOD$

$$= OB \cdot \cos A$$

इसी प्रकार,  $OE = OC \cos B$

$$OF = OA \cos C$$

$\therefore$  दिए हुए बलों का परिणामी  $\Delta ABC$  के परिकेन्द्र O से होकर जाता है, इसलिए O के सापेक्ष सभी बलों के आघूर्णों का बीजीय योगफल शून्य होगा।

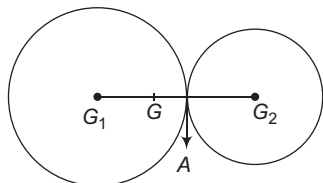
अर्थात्  $P \cdot OD + Q \cdot OE + R \cdot OF = 0$

$$P \cdot OB \cos A + Q \cdot OC \cos B + R \cdot OA \cos C = 0$$

$$\Rightarrow P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0$$

59. माना आकृति का गुरुत्व केन्द्र G है, तब

$$AG = \frac{(\text{बड़े गोले का भार}) \cdot AG_1 + (\text{छोटे गोले का भार}) \cdot (-AG_2)}{\text{बड़े गोले का भार} + \text{छोटे गोले का भार}}$$



$$= \frac{\frac{4}{3}\pi(6)^3 w \times 6 - \frac{4}{3}\pi(3)^3 w \times 3}{288\pi w + 36\pi w}$$

$$AG = 5 \text{ सेमी}$$

$$\therefore GG_1 = 6 - 5 = 1 \text{ सेमी}$$

60.  $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$

$$R_1 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\therefore R_1 = R_2$$

$$= 0$$

61. गति की समीकरण  $h = ut_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$  से

$$5 = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \dots(i) [\because u = 0]$$

एवं  $20 = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \dots(ii)$

$$\therefore \frac{5}{20} = \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2}$$

अतः  $\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1}{4}$  या  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट अनुपात 1:2 होगा।

63. अभीष्ट समय  $= \frac{v}{g \sin \theta} = \frac{49\sqrt{2}}{9.8 \times \sin 45^\circ} = \frac{49\sqrt{2}}{9.8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 10 \text{ सेकण्ड}$

65.  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$

$$= 1 + 1 - 2\cos \theta$$

$$= 2[1 - \cos \theta]$$

$$= 2\left[1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \left|\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}\right| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

66.  $(A + B)$  द्वारा एक दिन में किया गया कार्य  $= \frac{1}{12}$

$(B + C)$  द्वारा एक दिन में किया गया कार्य  $= \frac{1}{15}$

तथा  $(C + A)$  द्वारा एक दिन में किया गया कार्य  $= \frac{1}{20}$

14

हल प्रश्न-पत्र - 2011

$$\begin{aligned}\therefore A \text{ द्वारा एक दिन में किया गया कार्य} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{15} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5+3-4}{60} \right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{60} = \frac{1}{30}\end{aligned}$$

अतः A अकेला काम को 30 दिनों में करेगा।

$$\begin{aligned}67. \text{ औसत चाल} &= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} \\ &= \frac{50+40+90}{\frac{50}{25} + \frac{40}{20} + \frac{90}{15}} = \frac{180}{10} = 18 \text{ किमी/घण्टा}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}68. 2P &= P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^{15} \quad \dots(i) \\ 8P &= P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^{t_2} \quad \dots(ii)\end{aligned}$$

समी. (i) व (ii) से

$$\begin{aligned}t_2 &= 15 \times 3 \quad [\because 2^3 = 8] \\ &= 45 \text{ वर्ष}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}69. \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \frac{\log 6}{\log 5} \times \frac{\log 7}{\log 6} \times \frac{\log 8}{\log 7} \times \frac{\log 8}{\log 8} \\ = \frac{\log 9}{\log 3} = \log_3 9 = 2 \log_3 3 = 2\end{aligned}$$

70. प्रश्नानुसार समीकरण  $3x - 4y = 5$  तथा  $12x - 16y = 20$ 

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{-4}{-16} = \frac{5}{20} \\ \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

अतः कोई उभयनिष्ठ हल नहीं होगा।

71. माना C को मिला भाग = ₹ x

$$\therefore B \text{ को मिला भाग} = ₹ (x + 8)$$

$$A \text{ को मिला भाग} = ₹ (x + 15)$$

$$\text{अतः } x + (x + 8) + (x + 15) = 53$$

$$\text{या } 3x = 53 - 23$$

$$\text{या } x = 10$$

$$\therefore \text{अभीष्ट अनुपात } A : B : C = 25 : 18 : 10$$

72. समीकरण  $x^2 + px + q = 0$  के मूल 1 तथा 2 हैं।

$$\therefore -p = 1 + 2 \text{ तथा } q = 1 \times 2$$

$$p = -3, q = 2$$

$$\text{पुनः } qx^2 - px + 1 = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{p}{q} = \frac{-3}{2} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } \alpha \cdot \beta = \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \quad \dots(ii)$$

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{9}{4} - 4 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 2\end{aligned}$$

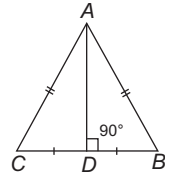
$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2} \quad \dots(iii) \text{ [समी. (i) तथा (iii) से]}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -1$$

73. किसी त्रिभुज के अन्तःकोणों के अर्द्धको का कटान बिन्दु अन्तःवृत्त का केन्द्र होता है।

$$\begin{aligned}74. \text{ चित्रानुसार } AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ \Rightarrow AB^2 - AD^2 &= BD \times BD \\ \Rightarrow AB^2 - AD^2 &= BD \times DC \\ [\because CD = DB]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}77. \frac{1}{(1-x)(3-x)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1-x)^{-1} - (3-x)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1-x)^{-1} - \frac{1}{3} \left( \frac{1-x}{3} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1+x+x^2+\dots) - \frac{1}{3} \right] \left[ 1 + \frac{x}{3} + \left( \frac{x}{3} \right)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

$$\therefore x^n \text{ का गुणांक} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1}} \right)$$

$$78. \text{ माध्य } m = \frac{1+3+4+5+7+4}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned}m-1 &= \frac{3+2+2+4+3+3+p}{7} \\ 3 &= \frac{17+p}{7}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = 4$$

अतः नम्बर 3, 2, 2, 4, 3, 3, 4 को घटते क्रम में रखने पर,

$$4, 4, 3, 3, 3, 2, 2 \text{ में माध्यिका} = 3 = q$$

$$\therefore p + q = 4 + 3 = 7$$

79. दिया है  $a^x = b^y = c^z = k$  तब

$$\therefore a = (k)^{1/x}, b = (k)^{1/y}, c = (k)^{1/z}$$

$$\therefore b^2 = ac$$

$$\therefore k^{2/y} = k^{1/x} \cdot k^{1/z}$$

## हल प्रश्न-पत्र - 2011

15

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\text{या } \frac{2xz}{y} = (z+x)$$

$$\text{या } y = \frac{2xz}{z+x}$$

$$81. 250 \text{ व } 300 \text{ के मध्य के आँकड़े} = 38 - 15 = 23$$

$$84. \sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 25$$

$$\bar{X}_1 = 55, \bar{X}_2 = 60$$

$$n_1 = 30, n_2 = 20$$

तब,

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{55 \times 30 + 20 \times 60}{50} = 57$$

$$d_1 = \bar{X}_1 - \bar{X} = -2, d_2 = \bar{X}_2 - \bar{X} = 3$$

$$\text{विचलन } \sigma^2 = \frac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{30(16 + 4) + 20(25 + 9)}{50}$$

$$\sigma^2 = 25.6$$

$$\therefore \text{मानक विचलन } \sigma = \sqrt{25.6} = 5.06$$

$$89. \text{ माना } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(3A) = \begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 27 (\det A)$$

$$90. \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{15}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+3}}$$

$$= \frac{1}{4} [\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{11} - \sqrt{7} + \sqrt{15} - \sqrt{11} + \dots + \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n-1}]$$

$$= \frac{1}{4} [\sqrt{4n+3} - \sqrt{3}] = \frac{1}{4} \frac{(\sqrt{4n+3} - \sqrt{3})(\sqrt{4n+3} + \sqrt{3})}{(\sqrt{4n+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{4n+3-3}{\sqrt{4n+3} + \sqrt{3}} \right] = \frac{n}{\sqrt{4n+3} + \sqrt{3}}$$

$$92. 5 \text{ पुरुषों के एक गोल मेज पर बैठने के प्रकार} = (5-1)! = 4!$$

$$\therefore \text{अब 5 नए स्थानों पर 2 महिलाओं को बैठाने के कुल प्रकार} = {}^5P_2$$

$$\text{अतः कुल प्रकार} = 4! \times {}^5P_2 = 4! \times \frac{5!}{3!} = \frac{4 \times 3! \times 5!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 480$$

$$93. \therefore a_n = \sum_{r=0}^n \frac{1}{{}^nC_r}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^n \frac{r}{{}^nC_r} = \sum_{r=0}^n \frac{n-(n-r)}{{}^nC_{n-r}} = n \sum_{r=0}^n \frac{1}{{}^nC_r} - \sum_{r=0}^n \frac{n-r}{{}^nC_{n-r}}$$

$$= n a_n - \sum_{r=0}^n \frac{r}{{}^nC_r}$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{r=0}^n \frac{r}{{}^nC_r} = n a_n$$

$$= \frac{n a_n}{2}$$

$$94. 1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times n^2}{n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1 + 1}{n n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)n-2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)-2+2}{n-2!} + e$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)}{(n-2)n-3!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n-2!} + e$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-3!} + 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-2!} + e$$

$$= e + 3e + e = 5e$$

$$95. \text{अभीष्ट प्राप्तिरता} = \frac{3}{7} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4}$$

$$98. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & \sin\theta & 1 \\ 0 & 1 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix} \quad [\therefore C_1 \rightarrow C_1 + C_3]$$

$$\Rightarrow \Delta = 2(1 + \sin^2\theta)$$

$$\text{अतः } 0 \leq \sin^2\theta \leq 1$$

$$2 \leq 2(1 + \sin^2\theta) \leq 4$$

$$\Rightarrow \Delta \in [2, 4]$$

$$101. (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$$

$$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$$

$$= (b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A)$$

$$= a + b + c$$

$$102. u = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow e^u = \frac{1 + \tan\theta/2}{1 - \tan\theta/2}$$

16

हल प्रश्न-पत्र - 2011

$$\cos u = \frac{e^u + e^{-u}}{2e^u} = \frac{1 + \tan^2 x/2}{1 - \tan^2 x/2} = \frac{1}{\cos x} = \sec \theta$$

103.  $\sinh^{-1}(3)$

$$\Rightarrow \sinh^{-1}x = \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\therefore \sinh^{-1}3 = \log_e(3 + \sqrt{9 + 1}) \\ = \log_e(3 + \sqrt{10})$$

104.  $\sqrt{-6}\sqrt{-6} = (-6)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = (-6)^1 = -6$

105. चूँकि  $|\beta| = 1$

$$\therefore \left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = \left| \frac{\beta - \alpha}{\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \right| = \left| \frac{\beta - \alpha}{\beta(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} \right| = \frac{1}{|\beta|} \left| \frac{\beta - \alpha}{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} \right| = \frac{1}{|\beta|} = 1$$

109. इकाई के  $n$ वें मूल गुणात्मक श्रेणी में होंगे जहाँ

$$r = e^{i2\pi/n} \text{ होगा।}$$

110. त्रिभुज के शीर्षों  $z, z + iz$  तथा  $iz$  से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|z|^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}|z|^2 = 50$$

$$|z|^2 = 100$$

$$|z| = 10$$

111.  $x^2 - y^2 - 9z^2 + 6yz = x^2 - (y^2 + 9z^2 - 6yz)$   
 $= x^2 - (y - 3z)^2 = (x - y + 3z)(x + y - 3z)$

112.  $A : B = 7 : 9$  तथा  $B : C = 5 : 4$

$$\therefore A : B : C = 7 \times 5 : 9 \times 5 : 4 \times 9 = 35 : 45 : 36$$

114.  $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i} = \frac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} - \frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} - \frac{i}{i^2}$   
 $= \frac{10+29i-10}{29} - \frac{(12-25i-12)}{25} + i$   
 $= i + i + i = 0 + 3i$

अतः वास्तविक भाग = 0

116.  $1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} = 0$

$0 \leq x \leq \pi$  के लिए

$$\sin x \sin^2 \frac{x}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \text{ का } [0, \pi] \text{ के बीच कोई हल नहीं है।}$$

पुनः  $-\pi \leq x < 0$  के लिए

$$-1 < \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 < 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

का  $[-\pi, 0]$  के बीच कोई हल नहीं है।

$\therefore$  दी गई समीकरण का वर्ग-अन्तराल  $[-\pi, \pi]$  के मध्य कोई हल नहीं है।

117.  $\cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{3}\right)$

$$= \cos^{-1}\left\{\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right\} + \sin^{-1}\left\{\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - \sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

118.  $\frac{2\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$

$$\Rightarrow 2bcc\cos A + acc\cos B + 2abc\cos C = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 2bc \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + ac \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + 2ab$$

$$\times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 = 2a^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

अतः त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है।

$$\therefore \text{कोण } A = \frac{\pi}{2}$$

120. माना  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = k$

$$\therefore a = 3k, b = 4k \text{ एवं } C = 7k$$

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{3k+4k+7k}{7k} = \frac{14k}{7k} = 2$$