

H

2017 (I)  
गणित विज्ञान  
प्रश्न पत्र

4

A

विषय कोड

पुस्तिका कोड

समय : 3:00 घंटे

पूर्णांक : 200 अंक

## अनुदेश

- आपने हिन्दी को माध्यम चुना है। इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में + 40 भाग 'B' + 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ) दिए गए हैं। आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी।
- ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक अलग से दिया गया है। अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे-फटे नहीं हैं। यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं। इसी तरह से ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक को भी जांच लें। इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं।
- ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें।
- आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृत्तों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है।
- भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक, भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है। प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा। भाग 'C' के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है।
- भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है। आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूँढना है। भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या "एक से अधिक" विकल्प सही हो सकते हैं। भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही घयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा।
- नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले परीक्षार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है।
- परीक्षार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए।
- केलकूलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है।
- परीक्षा समाप्ति पर छिद्र बिन्दु चिह्नित स्थान से OMR उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल OMR उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बनलैस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।
- हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रमाणिक होगा।
- केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले परीक्षार्थी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनुमति दी जाएगी।

रोल नंबर : .....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ।

नाम : .....

.....  
इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर



- opposite corners of size  $1m \times 1m$  should be left uncovered. How many tiles are required to complete the job without breaking the tiles or overlapping them?
- 6
  - 7
  - 8
  - Impossible to cover
6. यदि  $42 \rightarrow 26$ ,  $71 \rightarrow 78$ ,  $33 \rightarrow 16$ , तब  $62 \rightarrow$
- 68
  - 54
  - 38
  - 39
6. If  $42 \rightarrow 26$ ,  $71 \rightarrow 78$ ,  $33 \rightarrow 16$ , then  $62 \rightarrow$
- 68
  - 54
  - 38
  - 39
7. एक दूकानदार एक फाइल एवं एक कॉपी Rs 27 में पहले ग्राहक को, एक कॉपी एवं एक पेन Rs 31 में दूसरे ग्राहक को तथा एक पेन एवं एक फाइल Rs 29 में तीसरे ग्राहक को बेचता है, वस्तुओं के मूल्य पूर्ण रूपों में हैं। निम्न में से कौन-सा अनुमान सही है?
- तीनों में पेन सबसे महँगा है
  - तीनों में फाइल सबसे महँगी है
  - तीनों में कॉपी सबसे महँगी है
  - दूकानदार ने विभिन्न वस्तुएं विभिन्न ग्राहकों को अलग-अलग मूल्यों पर बेची हैं।
7. A shopkeeper sells a file and a notebook for Rs 27 to the first customer, a notebook and a pen for Rs 31 to the second customer and a pen and file for Rs 29 to the third customer. The prices of the items are rounded in rupees. Which of the following inferences is correct?
- The pen is the costliest of the three
  - The file is the costliest of the three
  - The notebook is the costliest of the three
  - The shopkeeper sold the different items to different customers at different rates.
8. एक वर्ग की भुजा ' $a$ ' है। इसमें सबसे बड़ा संभाव्य वृत्त बैठायेँ और इस वृत्त के अंदर एक सबसे बड़ा संभाव्य वर्ग बैठायेँ। सबसे अंदर वाले वर्ग की भुजा की लम्बाई क्या है?
- $\frac{a}{\pi\sqrt{2}}$
  - $\frac{a}{2}$
  - $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
  - $\frac{a}{\sqrt{2}}$
8. Consider a square of side  $a$ . Fit the largest possible circle inside it and the largest possible square inside the circle. What is the side length of the innermost square?
- $\frac{a}{\pi\sqrt{2}}$
  - $\frac{a}{2}$
  - $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
  - $\frac{a}{\sqrt{2}}$
9. जब मैं घर से कार्यालय 5 किमी./घंटा की गति से चलकर जाता हूँ तो 8 मिनट देर से कार्यालय पहुँचता हूँ। यदि मैं 8 किमी./घंटा की गति से चलता हूँ तो 5 मिनट देर से पहुँचता हूँ। मेरे घर से कार्यालय कितनी दूर है?
- 2 किमी.
  - 1/3 किमी.
  - 2/3 किमी.
  - 1/2 किमी.
9. Walking from my home at a speed of 5 km/h I am 8 minutes late in reaching my office. If I walk at a speed of 8 km/h I reach 5 minutes late. How far is my office from the house?
- 2 km
  - 1/3 km
  - 2/3 km
  - 1/2 km
10. A, B और C तीन विभिन्न अंक हैं। यदि इन्हें नीचे दिखाये अनुसार जोड़ा गया है:
- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | A | B | C |
| + | A | B | C |
| + | A | B | C |
|   | C | C | C |
- तो A, B और C का मान ज्ञात करें
- $A = 3, B = 4, C = 5$
  - $A = 2, B = 3, C = 1$
  - $A = 5, B = 1, C = 3$
  - $A = 1, B = 8, C = 5$

10. A, B and C are three distinct digits. If they are added as below,

$$\begin{array}{r}
 \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\
 \phantom{+} A \phantom{+} B \phantom{+} C \\
 + \phantom{+} A \phantom{+} B \phantom{+} C \\
 + \phantom{+} A \phantom{+} B \phantom{+} C \\
 \hline
 C \phantom{+} C \phantom{+} C
 \end{array}$$

find out the value of A, B and C

1. A = 3, B = 4, C = 5
  2. A = 2, B = 3, C = 1
  3. A = 5, B = 1, C = 3
  4. A = 1, B = 8, C = 5
11. भूमध्य रेखा पर एक कसकर बंधने वाली पट्टी लपेटाई गई है। एक दूसरी वृत्ताकार पट्टी जिसकी लंबाई पहली पट्टी की अपेक्षा 15 मी. अधिक है, पहली पट्टी से कुछ ऊँचाई पर स्थित है। व्यक्तियों का एक समूह लंबी पट्टी के नीचे से निकलने की चेष्टा करता है क्या वे इसके नीचे चल पायेंगे? (पृथ्वी की परिधि लगभग 40,000 किमी. है। व्यक्तियों की लंबाई 1 से 2 मीटर के बीच है)
1. हाँ
  2. नहीं
  3. ज्ञात नहीं किया जा सकता।
  4. 1.7 मीटर लंबाई से कम वाले व्यक्ति ही
11. A tight fitting band is wrapped around the Equator. Another circular band whose length is 15 m more lies at a certain height over the first band. A group of human beings attempt to pass under the longer band. Can they walk under it? (Earth's circumference is roughly 40,000 km. The height of human beings is between 1 & 2 m)
1. Yes
  2. No
  3. Can not be determined
  4. Only those with height less than 1.7 m
12. पांच लोगो के एक समूह K, L, M, N और P में L सबसे लंबा व उम्र में सबसे बड़ा है। M, N से बड़ा लेकिन K से ठिगना है। M और P समान उम्र के हैं तथा P, K से लंबा है। N और K समान लंबाई के हैं

और K, P से छोटा है। निम्न अनुमानों में से कौन-सा अवश्यभावी है?

1. P, M से लंबा है
  2. N उम्र में सबसे छोटा है
  3. N, P से उम्र में बड़ा है
  4. N, K से उम्र में बड़ा है
12. L is the tallest and eldest of a group of five people K, L, M, N and P. M is elder to N and shorter than K. M and P are of same age and P is taller than K. N and K are of same height and K is younger to P. Which of the following inferences is certain?
1. P is taller than M
  2. N is the youngest
  3. N is elder to P
  4. N is elder to K
13. तीन क्रमिक धन पूर्णांकों का गुणनफल उनके योग के बराबर है तो उनके वर्गों का योग क्या होगा?
1. 9
  2. 14
  3. 16
  4. 24
13. If the product of three consecutive positive integers is equal to their sum, then what would be the sum of their squares?
1. 9
  2. 14
  3. 16
  4. 24
14. एक लंबे धातु के बेलन को सिरे-से-सिरे तक सुसंहत (चुस्त) रूप से  $d$  व्यास की  $n$  गोलाकार मोम की गेंदों से भरा जाता है। यदि गेंदें पूर्ण रूप से पिघल जायें तो पिघले हुए मोम का अंश आयतन है
1.  $d$  व  $n$  दोनों पर निर्भर नहीं
  2.  $d$  व  $n$  दोनों पर निर्भर
  3.  $d$  पर निर्भर नहीं परंतु  $n$  पर निर्भर
  4.  $d$  पर निर्भर परंतु  $n$  पर निर्भर नहीं
14. A tall metal cylinder is filled end-to-end with  $n$  snugly fitting spherical wax balls of diameter  $d$ . If the balls melt completely, the volume fraction occupied by the melted wax is

1. independent of both  $d$  and  $n$
  2. dependent on both  $d$  and  $n$
  3. independent of  $d$ , but dependent on  $n$
  4. dependent on  $d$ , but independent of  $n$
15. कुछ मछुआरों ने कुछ मछलियां पकड़ीं। किसी ने भी 20 से ज्यादा मछलियां नहीं पकड़ीं।  $a_1$  मछुआरों ने आपस में कम से कम एक मछली पकड़ी,  $a_2$  मछुआरों ने आपस में कम से कम दो मछलियां पकड़ीं, इसी तरह  $a_{20}$  मछुआरों ने आपस में ठीक 20 मछलियां पकड़ीं। कुल कितनी मछलियां पकड़ी गयीं?
1.  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$
  2.  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 20a_{20}$
  3.  $20(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20})$
  4.  $20(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 20a_{20})$
15. Some fishermen caught some fish. No one caught more than 20 fish.  $a_1$  number of fishermen caught at least one fish among them,  $a_2$  number of fishermen caught at least two fish among them, and so on and  $a_{20}$  number of fishermen caught exactly 20 fish among them. How many fish were caught?
1.  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$
  2.  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 20a_{20}$
  3.  $20(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20})$
  4.  $20(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 20a_{20})$
16. यदि NET14 एवं NET15 पांच अंकों की ऐसी संख्यायें हैं जिसमें उनका योग = 157229, तब  $N + E + T$  कितना होगा?
1. 15
  2. 21
  3. 25
  4. 72
16. If NET14 & NET15 are five digit numbers such that their sum = 157229, then  $N + E + T$  would be
1. 15
  2. 21
  3. 25
  4. 72

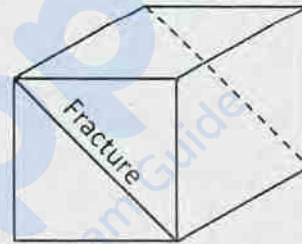
17. एक बेलनाकार केक को 16 बराबर भागों में काटा जाना है। इसे करने के लिए कम से कम कितनी बार इसे काटा जाये?

1. 9
2. 3
3. 8
4. 5

17. A cylindrical cake is to be cut into 16 equal pieces. What is the minimum number of cuts required to do so?

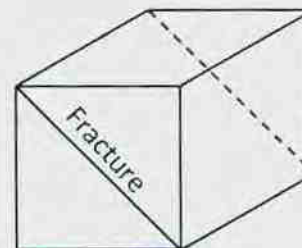
1. 9
2. 3
3. 8
4. 5

18. एक संगमरमर का घनाकार  $(1 \times 1 \times 1 m^3)$  खण्ड है जिसमें चित्रानुसार समतलीय विभंश है। विभंश को छोड़ते हुए,  $20 \times 20 \times 5$  सें.मी.<sup>3</sup> की अधिकतम कितनी पट्टियां काटी जा सकती हैं?



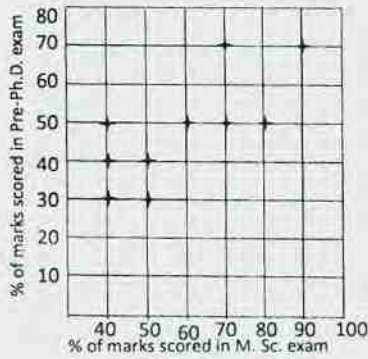
1. 200
2. 300
3. 400
4. 500

18. The diagram shows a cubic block of marble  $(1 \times 1 \times 1 m^3)$  having a planar fracture. What is the maximum number of slabs sized  $20 \times 20 \times 5 cm^3$  that can be cut from this block avoiding the fracture?



1. 200
2. 300
3. 400
4. 500

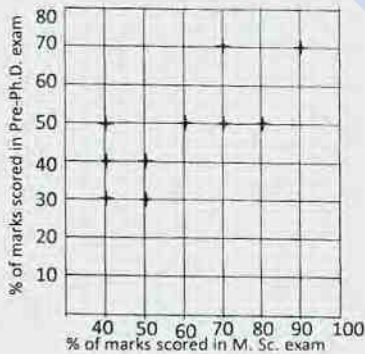
19.



पूर्व-Ph.D. परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांक तथा उनके द्वारा M.Sc. परीक्षा के प्राप्तांकों को ग्राफ में दर्शाया गया है: निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. दो विद्यार्थियों ने पूर्व-Ph.D. परीक्षा में M.Sc. परीक्षा की अपेक्षा बेहतर अंक पाये हैं
2. वे विद्यार्थी जिन्होंने पूर्व-Ph.D. परीक्षा में 50% अंक प्राप्त किये उन्होंने M.Sc. परीक्षा में अधिक प्रतिशत अंक प्राप्त किये हैं
3. दो विद्यार्थियों ने पूर्व-Ph.D. व M.Sc. परीक्षाओं में समान प्रतिशत अंक पाये हैं
4. वह विद्यार्थी जिसके M.Sc. परीक्षा में सर्वाधिक अंक आये सिर्फ उसके ही पूर्व-Ph.D. परीक्षा में भी सर्वाधिक अंक आये हैं

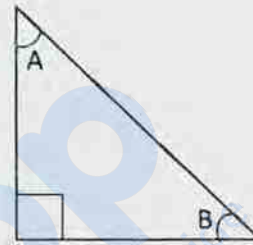
19.



Pre-Ph.D. exam score of 10 students are plotted against their M.Sc. marks. Which of the following is true?

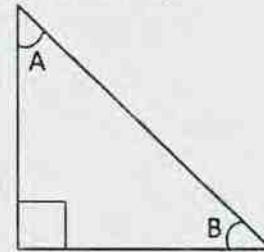
1. Two students have scored better in Pre-Ph.D. than their M.Sc. exam.
2. All those students who scored 50% in Pre-Ph.D. scored more percentage of marks in their M.Sc. exam.
3. Two students scored the same percentage of marks in their Pre-Ph.D. and M.Sc. exams.
4. The student who scored maximum in M.Sc. is the only student to get maximum in Pre-Ph.D. exam

20. दिखाये गये समकोणीय त्रिभुज में  $\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$  का मान क्या है?



1.  $-1/2$
2. 1
3.  $+1/2$
4. -1

20. With reference to the right-angled triangle shown, what is the value of  $\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$ ?



1.  $-1/2$
2. 1
3.  $+1/2$
4. -1

## भाग \PART 'B'

### Unit-1

21.  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$  तो

1.  $L = 0$
2.  $L = 1$
3.  $0 < L < \infty$
4.  $L = \infty$

21.  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ . Then

1.  $L = 0$
2.  $L = 1$
3.  $0 < L < \infty$
4.  $L = \infty$

22. अनुक्रम

$$a_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n$$

पर विचारें। तो

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = e$
3.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$
4.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$

22. Consider the sequence

$$a_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n$$

Then

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = e$
3.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$
4.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$

23.  $a > 0$  के लिए, श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

अभिसारी होती है, यदि तथा मात्र यदि

1.  $0 < a < e$
2.  $0 < a \leq e$
3.  $0 < a < \frac{1}{e}$
4.  $0 < a \leq \frac{1}{e}$

23. For  $a > 0$ , the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

is convergent if and only if

1.  $0 < a < e$
2.  $0 < a \leq e$
3.  $0 < a < \frac{1}{e}$
4.  $0 < a \leq \frac{1}{e}$

24. मानें कि  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  इससे परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

तो

1.  $f$  संतत नहीं है।
2.  $f$  संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है।
3.  $f$  अवकलनीय है।
4.  $f$  परिबद्ध नहीं है।

24. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Then

1.  $f$  is not continuous
2.  $f$  is continuous but not differentiable
3.  $f$  is differentiable
4.  $f$  is not bounded

25. मानें कि

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 1 \text{ या } n \text{ के मात्र अभाज्य गुणनखंड 2 या 3 हैं}\}$ ,

उदाहरणार्थ  $6 \in A, 10 \notin A$ .

मानें कि  $S = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$  तो

1.  $A$  परिमित है।
  2.  $S$  एक अपसारी श्रेणी है।
  3.  $S = 3$
  4.  $S = 6$
25. Let  
 $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 1 \text{ or the only prime factors of } n \text{ are } 2 \text{ or } 3\}$ ,  
 for example,  $6 \in A$ ,  $10 \notin A$ .  
 Let  $S = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ . Then
1.  $A$  is finite
  2.  $S$  is a divergent series
  3.  $S = 3$
  4.  $S = 6$
26. मानें कि  $n \geq 1$  के लिए  $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ ,  
 $x \in \mathbb{R}$ . तो अनुक्रम  $\{f_n\}$  है
1.  $\mathbb{R}$  पर एकसमानतः अभिसारी
  2.  $\mathbb{R}$  के संहत उपसमुच्चयों के लिए एकसमानतः अभिसारी
  3. परिबद्ध तथा  $\mathbb{R}$  पर एकसमानतः नहीं अभिसारी
  4. अपरिबद्ध फलनों की एक श्रेणी
26. For  $n \geq 1$ , let  $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Then the sequence  $\{f_n\}$  is
1. uniformly convergent on  $\mathbb{R}$
  2. uniformly convergent only on compact subsets of  $\mathbb{R}$
  3. bounded and not uniformly convergent on  $\mathbb{R}$
  4. a sequence of unbounded functions
27. मानें कि  $A$  एक  $4 \times 4$  आव्यूह है। मानें कि  $A$   
 की शून्य समष्टि  $N(A)$  है  
 $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x + y + w = 0\}$ . तो
1. विम (स्तंभ समष्टि  $(A)$ ) = 1
  2. विम (स्तंभ समष्टि  $(A)$ ) = 2
  3. कोटि  $(A) = 1$
  4.  $S = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ ,  $N(A)$  का एक आधार है।
27. Let  $A$  be a  $4 \times 4$  matrix. Suppose that the  
 null space  $N(A)$  of  $A$  is  
 $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x + y + w = 0\}$ . Then
1.  $\dim(\text{column space}(A)) = 1$
  2.  $\dim(\text{column space}(A)) = 2$
  3.  $\text{rank}(A) = 1$
  4.  $S = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$  is a basis of  $N(A)$
28. मानें कि  $A$  तथा  $B$  वास्तविक व्युत्क्रमणीय  
 आव्यूह हैं ताकि  $AB = -BA$ . तो
1.  $\text{अनुरेख}(A) = \text{अनुरेख}(B) = 0$
  2.  $\text{अनुरेख}(A) = \text{अनुरेख}(B) = 1$
  3.  $\text{अनुरेख}(A) = 0, \text{अनुरेख}(B) = 1$
  4.  $\text{अनुरेख}(A) = 1, \text{अनुरेख}(B) = 0$
28. Let  $A$  and  $B$  be real invertible matrices such  
 that  $AB = -BA$ . Then
1.  $\text{Trace}(A) = \text{Trace}(B) = 0$
  2.  $\text{Trace}(A) = \text{Trace}(B) = 1$
  3.  $\text{Trace}(A) = 0, \text{Trace}(B) = 1$
  4.  $\text{Trace}(A) = 1, \text{Trace}(B) = 0$
29. मानें कि  $A$  एक  $n \times n$  स्वसंलग्न आव्यूह है,  
 अभिलक्षणिक मान  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  के साथ। मानें कि
- $$\|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2},$$
- $$X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \text{ के लिए।}$$
- यदि  $p(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n$  है, तो  
 $\sup_{\|X\|_2=1} \|p(A)X\|_2$  इस समान है:
1.  $\max\{a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n : 1 \leq j \leq n\}$
  2.  $\max\{|a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n| : 1 \leq j \leq n\}$
  3.  $\min\{a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n : 1 \leq j \leq n\}$
  4.  $\min\{|a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n| : 1 \leq j \leq n\}$
29. Let  $A$  be an  $n \times n$  self-adjoint matrix with  
 eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .  
 Let  $\|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$  for  
 $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ .

If  $p(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n$  then

$\sup_{\|X\|_2=1} \|p(A)X\|_2$  is equal to

1.  $\max\{a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n : 1 \leq j \leq n\}$
2.  $\max\{|a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n| : 1 \leq j \leq n\}$
3.  $\min\{a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n : 1 \leq j \leq n\}$
4.  $\min\{|a_0 + a_1\lambda_j + \dots + a_n\lambda_j^n| : 1 \leq j \leq n\}$

30. मानें कि  $p(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  एक बहुपद है,

जहां  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid x_0 \in \mathbb{R}$  को नियत करें।

मानें कि

$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : p(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c \text{ सभी } x \in \mathbb{R} \text{ के लिए}\}$ .

तो  $S$  के अवयवों की संख्या है

1. 0
2. 1
3. दृढ़तः 1 से अधिक परंतु परिमित
4. अपरिमित

30. Let  $p(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  be a polynomial,

where  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Fix  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Let

$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : p(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c \text{ for all } x \in \mathbb{R}\}$ .

Then the number of elements in  $S$  is

1. 0
2. 1
3. strictly greater than 1 but finite
4. infinite

31. मानें कि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$  तथा  $I$  एक

$3 \times 3$  तत्समक आव्यूह है।

यदि  $6A^{-1} = aA^2 + bA + cI$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  के लिए, तो  $(a, b, c)$  इस समान है

1. (1, 2, 1)
2. (1, -1, 2)
3. (4, 1, 1)
4. (1, 4, 1)

31. Let  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$  and  $I$  be the  $3 \times 3$  identity matrix.

If  $6A^{-1} = aA^2 + bA + cI$  for  $a, b, c \in \mathbb{R}$  then  $(a, b, c)$  equals

1. (1, 2, 1)
2. (1, -1, 2)
3. (4, 1, 1)
4. (1, 4, 1)

32. मानें कि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ . तो  $A$  के

अभिलक्षणिक मान हैं

1. -4, 3, -3
2. 4, 3, 1
3.  $4, -4 \pm \sqrt{13}$
4.  $4, -2 \pm 2\sqrt{7}$

32. Let  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ . Then the eigenvalues of  $A$  are

1. -4, 3, -3
2. 4, 3, 1
3.  $4, -4 \pm \sqrt{13}$
4.  $4, -2 \pm 2\sqrt{7}$

## Unit-2

33. मानें कि  $\mathbb{C}$  में मूलबिंदु पर केंद्रित एकांक वृत्त को  $C$  निर्दिष्ट करता है। तो

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C |1+z+z^2|^2 dz,$$

जहां समाकल  $C$  के समांतर वामावर्त लिया जाता है, इस समान है:

- |      |      |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 1 |
| 3. 2 | 4. 3 |

33. Let  $C$  denote the unit circle centered at the origin in  $\mathbb{C}$ .

$$\text{Then } \frac{1}{2\pi i} \int_C |1+z+z^2|^2 dz,$$

where the integral is taken anti-clockwise along  $C$ , equals

- |      |      |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 1 |
| 3. 2 | 4. 3 |

34. घात श्रेणी

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log(n)x^n$$

पर विचारें। श्रेणी  $f(x)$  की अभिसरण त्रिज्या है

- |      |             |
|------|-------------|
| 1. 0 | 2. 1        |
| 3. 3 | 4. $\infty$ |

34. Consider the power series

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log(n)x^n.$$

The radius of convergence of the series  $f(x)$  is

- |      |             |
|------|-------------|
| 1. 0 | 2. 1        |
| 3. 3 | 4. $\infty$ |

35. किसी विषम पूर्णांक  $k \geq 1$  के लिए, मानें कि  $\mathcal{F}$  सभी सर्वत्र वैश्लेषिक फलनों  $f$  का समुच्चय है ताकि

$f(x) = |x^k|$  सभी  $x \in (-1,1)$  के लिए। तो  $\mathcal{F}$  की गणनसांख्यिकी है

- 0
- 1
- दृढ़तः 1 से अधिक परंतु परिमित
- अपरिमित

35. For an odd integer  $k \geq 1$ , let  $\mathcal{F}$  be the set of all entire functions  $f$  such that

$f(x) = |x^k|$  for all  $x \in (-1,1)$ . Then the cardinality of  $\mathcal{F}$  is

- 0
- 1
- strictly greater than 1 but finite
- infinite

36. मानें कि  $z_0 \in \mathbb{C}$  के एक विवृत सामीप्य में  $f$  होलोमॉर्फिक है। यह दिये जाने पर कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$$

निरपेक्षतः अभिसरित होता है, हम इस निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

- $f$  अचर है।
- $f$  एक बहुपद है।
- $f$  को एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन तक विस्तारित किया जा सकता है।
- $f(x) \in \mathbb{R}$ , सभी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए।

36. Suppose  $f$  is holomorphic in an open neighbourhood of  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Given that the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$$

converges absolutely, we can conclude that

- $f$  is constant
- $f$  is a polynomial
- $f$  can be extended to an entire function
- $f(x) \in \mathbb{R}$  for all  $x \in \mathbb{R}$

37. मानें कि  $S$  100 से लेकर 999 तक के सभी पूर्णाकों का, जो न तो 3 से न तो 5 से भाज्य हैं, का समुच्चय है।  $S$  के अवयवों की संख्या है

- |        |        |
|--------|--------|
| 1. 480 | 2. 420 |
| 3. 360 | 4. 240 |

37. Let  $S$  be the set of all integers from 100 to 999 which are neither divisible by 3 nor divisible by 5. The number of elements in  $S$  is

- |        |        |
|--------|--------|
| 1. 480 | 2. 420 |
| 3. 360 | 4. 240 |

38. जब  $16^{2016}$  को 9 से भाजित किया जाता है तो पाये जाने वाला शेष है

- |      |      |
|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 7 |

38. The remainder obtained when  $16^{2016}$  is divided by 9 equals

- |      |      |
|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 7 |

39. बहुपद वलय  $\mathbb{C}[x, y]$  में गुणजावली

$I = (x^2 + 1, y)$  पर विचारें। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1.  $I$  एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।
2.  $I$  एक अभाज्य गुणजावली है परंतु एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है।
3.  $I$  एक उच्चिष्ठ गुणजावली है परंतु एक अभाज्य गुणजावली है नहीं है।
4.  $I$  न तो एक अभाज्य गुणजावली है, न तो एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।

39. Consider the ideal  $I = (x^2 + 1, y)$  in the polynomial ring  $\mathbb{C}[x, y]$ . Which of the following statements is true?

1.  $I$  is a maximal ideal
2.  $I$  is a prime ideal but not a maximal ideal
3.  $I$  is a maximal ideal but not a prime ideal
4.  $I$  is neither a prime ideal nor a maximal ideal

40. मानें कि  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  एक संतत मानचित्र है। सही कथन को चुनें।

1.  $f$  परिबद्ध है।
2.  $f$  का प्रतिबिंब,  $\mathbb{R}$  का एक विवृत उपसमुच्चय है
3.  $\mathbb{R}$  के सभी परिबद्ध उपसमुच्चयों  $A$  के लिए  $f(A)$  परिबद्ध है।
4.  $\mathbb{R}$  के सभी संहत उपसमुच्चयों  $A$  के लिए  $f^{-1}(A)$  संहत है।

40. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous map. Choose the correct statement.

1.  $f$  is bounded
2. The image of  $f$  is an open subset of  $\mathbb{R}$
3.  $f(A)$  is bounded for all bounded subsets  $A$  of  $\mathbb{R}$
4.  $f^{-1}(A)$  is compact for all compact subsets  $A$  of  $\mathbb{R}$

### Unit-3

41. मानें कि  $x: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  संतत है तथा  $x(0) = 0$ .

यदि  $(x(t))^2 \leq 2 + \int_0^t x(s) ds, \forall t \geq 0$ , तो निम्न में कौन-सा सही है?

1.  $x(\sqrt{2}) \in [0, 2]$
2.  $x(\sqrt{2}) \in [0, \frac{3}{\sqrt{2}}]$
3.  $x(\sqrt{2}) \in [\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}]$
4.  $x(\sqrt{2}) \in [10, \infty)$

41. Suppose  $x: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  is continuous and  $x(0) = 0$ .

If  $(x(t))^2 \leq 2 + \int_0^t x(s) ds, \forall t \geq 0$ , then which of the following is TRUE?

1.  $x(\sqrt{2}) \in [0, 2]$
2.  $x(\sqrt{2}) \in [0, \frac{3}{\sqrt{2}}]$
3.  $x(\sqrt{2}) \in [\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}]$
4.  $x(\sqrt{2}) \in [10, \infty)$

42.  $u(x, 0) = g(x)$  के अधीन, आंशिक अवकल समीकरण

$u_t - xu_x + 1 - u = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$  का हल है

1.  $u(x, t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^t))$
2.  $u(x, t) = 1 + e^t(1 - g(xe^t))$
3.  $u(x, t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^{-t}))$
4.  $u(x, t) = e^{-t}(1 - g(xe^t))$

42. The solution of the partial differential equation

$u_t - xu_x + 1 - u = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$  subject to  $u(x, 0) = g(x)$  is

1.  $u(x, t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^t))$
2.  $u(x, t) = 1 + e^t(1 - g(xe^t))$

3.  $u(x, t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^{-t}))$

4.  $u(x, t) = e^{-t}(1 - g(xe^t))$

43. मानें कि  $u \in C^2(\bar{B})$ ,  $\mathbb{R}^2$  में  $B$  इकाई गोला

है,  $B$  में  $\Delta u = f$

तथा  $\partial B$  पर  $\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = g$ ,  $\alpha > 0$ ,

जहां  $B$  का इकाई बाह्य लंब  $n$  है, को समाधान करता है। यदि एक हल का अस्तित्व है तो

1. वह अद्वितीय है।
2. यथार्थतः दो हल हैं।
3. यथार्थतः तीन हल हैं।
4. अपरिमिततः कई हल हैं।

43. Suppose  $u \in C^2(\bar{B})$ ,  $B$  is the unit ball in  $\mathbb{R}^2$ , satisfies

$$\Delta u = f \text{ in } B$$

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ on } \partial B, \alpha > 0,$$

where  $n$  is the unit outward normal to  $B$ . If a solution exists then

1. it is unique
2. there are exactly two solutions
3. there are exactly three solutions
4. there are infinitely many solutions

44. योजना

$$f'(x) = Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)$$

के लिए रंडन त्रुटि का परिमाण है:

1.  $h^2 f'''(\xi)$  if  $A = -\frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  
 $C = -\frac{2}{3h}$ .

2.  $h^2 f'''(\xi)$  if  $A = \frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  $C = \frac{2}{3h}$ .

3.  $h^2 f''(x)$  if  $A = -\frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  
 $C = -\frac{2}{3h}$ .

4.  $h^2 f''(x)$  if  $A = \frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  $C = \frac{2}{3h}$ .

44. The magnitude of the truncation error for the scheme

$$f'(x) = Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)$$

is equal to

1.  $h^2 f'''(\xi)$  if  $A = -\frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  
 $C = -\frac{2}{3h}$ .

2.  $h^2 f'''(\xi)$  if  $A = \frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  $C = \frac{2}{3h}$ .

3.  $h^2 f''(x)$  if  $A = -\frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  
 $C = -\frac{2}{3h}$ .

4.  $h^2 f''(x)$  if  $A = \frac{5}{6h}$ ,  $B = \frac{3}{2h}$ ,  $C = \frac{2}{3h}$ .

45. फलनों

$$\left\{ u \in C^1[0,1] \text{ ताकि } u(0) = 0 \text{ तथा } \max_{[0,1]} |u| = 1 \right\}$$

के वर्ग पर  $\int_0^1 (u'(t))^2 dt$  का निम्नक इस समान है:

1. 0
2. 1/2
3. 1
4. 2

45. The infimum of  $\int_0^1 (u'(t))^2 dt$  on the class of functions

$$\left\{ u \in C^1[0,1] \text{ such that } u(0) = 0 \text{ and } \max_{[0,1]} |u| = 1 \right\}$$

is equal to

1. 0
2. 1/2
3. 1
4. 2

46. मानें कि  $\phi(x)$ ,

$$\int_0^x e^{x-t} \phi(t) dt = x, \quad x > 0$$

का हल है। तो  $\phi(1)$  इस समान है:

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

46. Let  $\phi(x)$  be the solution of  $\int_0^x e^{x-t} \phi(t) dt = x$ ,  $x > 0$ . Then  $\phi(1)$  equals
1. -1
  2. 0
  3. 1
  4. 2
47. किसी दृढ़ पिंड जिसकी एक बिंदु O स्थिरीकरित है, तथा O के गिर्द कोई बाह्य बल आघूर्ण नहीं है, के जड़त्व के मुख्य आघूर्ण समान हैं। तो पिंड को घूर्णन करना चाहिए
1. चर परिमाण की कोणीय गति के साथ
  2. अचर परिमाण की कोणीय गति के साथ
  3. अचर कोणीय संवेग परंतु चर कोणीय गति के साथ
  4. चर कोणीय संवेग तथा चर कोणीय गति के साथ
47. A rigid body having one point O fixed and no external torque about O has equal principal moments of inertia. Then the body must rotate with
1. angular velocity of variable magnitude
  2. angular velocity with constant magnitude
  3. constant angular momentum but varying angular velocity
  4. varying angular momentum with varying angular velocity
48. त्रिज्या  $a$  के एक चिकने गोले पर गुरुत्व के अधीन गतिशील, द्रव्यमान  $m$  के एक कण को अंतर्विष्ट करते एक गोलीय लोलक पर विचारें। गोलीय ध्रुवीय कोण  $\theta$ ,  $\phi$ , के उपयोग से, जिसमें  $\theta$  अधोमुखी ऊर्ध्वाधर से ऊपर मापा जाता है, लगाना दिया जाता है:

1.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - g \cos \theta \right]$
2.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + g \cos \theta \right]$
3.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) + g \sin \theta \right]$
4.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) - g \sin \theta \right]$

48. Consider a spherical pendulum consisting of a particle of mass  $m$  which moves under gravity on a smooth sphere of radius  $a$ . In terms of spherical polar angles  $\theta, \phi$ , with  $\theta$  measured up from the downward vertical, the Lagrangian is given by

1.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - g \cos \theta \right]$
2.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + g \cos \theta \right]$
3.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) + g \sin \theta \right]$
4.  $ma \left[ \frac{a}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) - g \sin \theta \right]$

#### Unit-4

49. एक बक्से में 40 अंकित लाल गेंद तथा 60 अंकित काले गेंद हैं। बक्से से यादृच्छिकतः एक-एक करके गेंद, बिना पुनःस्थापन के, बाहर निकाले जाते हैं, तब तक, जब तक सभी गेंद बाहर नहीं निकाले जाते। निकाली गयी अंतिम गेंद की काली होने की प्रायिकता है
1.  $1/100$
  2.  $1/60$
  3.  $3/5$
  4.  $2/3$
49. A box contains 40 numbered red balls and 60 numbered black balls. From the box, balls are drawn one by one at random without replacement till all the balls are drawn. The probability that the last ball drawn is black equals
1.  $1/100$
  2.  $1/60$
  3.  $3/5$
  4.  $2/3$
50.  $X_1, X_2, \dots$  स्वतंत्र: सर्वथा समानतः बंटित यादृच्छिक चर हैं जिनका आम घनत्व  $f$  है। मानें कि सभी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $f(x) = f(-x)$  है। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?
1. प्रायिकता में  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow 0$  है।
  2. करीब-करीब निश्चिततः  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow 0$

3.  $P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) < 0\right) \rightarrow \frac{1}{2}$
4.  $\sum_{i=1}^n X_i$  और  $\sum_{i=1}^n (-1)^i X_i$  समान बंटन रखता है।

50.  $X_1, X_2, \dots$  are independent identically distributed random variables having common density  $f$ . Assume  $f(x) = f(-x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Which of the following statements is correct?

- $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow 0$  in probability
- $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow 0$  almost surely
- $P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) < 0\right) \rightarrow \frac{1}{2}$
- $\sum_{i=1}^n X_i$  has the same distribution as  $\sum_{i=1}^n (-1)^i X_i$

51. मानें कि समय  $t$  तक हुई दुर्घटनाओं की संख्या को  $N_t$  निर्दिष्ट करता है। मानें कि  $\{N_t\}$  एक प्वासॉ प्रक्रिया है, तीव्रता 2 के साथ। इसके दिये जाने पर कि समय काल  $[20, 30]$  में ठीक-ठीक 5 दुर्घटनायें हैं, इसकी सप्रतिबंध प्रायिकता क्या है कि समय काल  $[15, 25]$  में ठीक-ठीक एक दुर्घटना है?

- $\frac{15}{32} e^{-10}$
- $20 e^{-20}$
- $\frac{10^5}{5!} e^{-30}$
- $\frac{1}{5}$

51. Let  $N_t$  denote the number of accidents up to time  $t$ . Assume that  $\{N_t\}$  is a Poisson process with intensity 2. Given that there are exactly 5 accidents during the time period  $[20, 30]$ , what is the conditional probability that there is exactly one accident during the time period  $[15, 25]$ ?

- $\frac{15}{32} e^{-10}$
- $20 e^{-20}$
- $\frac{10^5}{5!} e^{-30}$
- $\frac{1}{5}$

52. प्रत्येक घनत्व

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

युक्त स्वतंत्र यादृच्छिक चर  $X$  तथा  $Y$  हैं। तो  $-\infty < t < \infty$  के लिए  $\frac{X+Y}{3}$  का घनत्व फलन इससे दिया जाता है।

- $\frac{6}{\pi} \frac{1}{4+9t^2}$
- $\frac{6}{\pi} \frac{1}{9+4t^2}$
- $\frac{3}{\pi} \frac{1}{1+9t^2}$
- $\frac{3}{\pi} \frac{1}{9+t^2}$

52.  $X$  and  $Y$  are independent random variables each having the density

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Then the density function of  $\frac{X+Y}{3}$  for  $-\infty < t < \infty$  is given by

- $\frac{6}{\pi} \frac{1}{4+9t^2}$
- $\frac{6}{\pi} \frac{1}{9+4t^2}$
- $\frac{3}{\pi} \frac{1}{1+9t^2}$
- $\frac{3}{\pi} \frac{1}{9+t^2}$

53. मानें कि प्रायिकता बंटन फलन

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x\theta} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$\theta > 0$  के साथ, युक्त एक बंटन से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $n \geq 2$  है। तो  $\theta$  का आघूर्ण विधि आकलन

- का अस्तित्व नहीं है।
- $\frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}$  है।
- $\frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$  है।
- $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}$  है।

53. Suppose  $\{X_1, \dots, X_n\}, n \geq 2$ , is a random sample from the distribution with probability density function

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x\theta} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

with  $\theta > 0$ . Then the *method of moments* estimator of  $\theta$

1. does not exist

2. is  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}$

3. is  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

4. is  $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}$

54. मानें कि  $\theta > 0$  के लिए प्रायिकता फलन

$$f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{if } x > \theta \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

युक्त बंटन से निकाला गया एक प्रतिदर्श,  $n \geq 5$  के लिए  $X_1, X_2, \dots, X_n$  है।  $\theta$  के लिए विश्वास्यता अंतराल

$$\left[ \min\{X_1, \dots, X_n\} - \frac{\ln 4}{n}, \min\{X_1, \dots, X_n\} + \frac{\ln 2}{n} \right]$$

का विश्वास्यता गुणांक है।

1. 0.5

2. 0.75

3. 0.95

4.  $1 - \frac{1}{2^n}$

54. Let  $X_1, X_2, \dots, X_n$  for  $n \geq 5$  be a random sample from the distribution with probability density function

$$f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{if } x > \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for  $\theta > 0$ . The confidence coefficient of the confidence interval

$$\left[ \min\{X_1, \dots, X_n\} - \frac{\ln 4}{n}, \min\{X_1, \dots, X_n\} + \frac{\ln 2}{n} \right]$$

for  $\theta$ , is

1. 0.5

2. 0.75

3. 0.95

4.  $1 - \frac{1}{2^n}$

55. मानें कि  $X$  माध्य  $1/\lambda$  के एक चरघातांकी बंटन से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। यदि  $\lambda$  का एक पूर्व बंटन, प्रायिकता घनत्व फलन

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & ; \lambda > 0 \\ 0 & ; \lambda \leq 0 \end{cases}$$

के साथ है, तो वर्गकृत त्रुटि हानि फलन के संदर्भ में  $1/\lambda$  का बेज आकलक है:

1.  $\frac{2}{X+1}$

2.  $\frac{1}{X}$

3.  $X$

4.  $\frac{X+1}{2}$

55. Let  $X$  be a random sample from an exponential distribution with mean  $1/\lambda$ . If  $\lambda$  has a prior distribution with probability density function

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & ; \lambda > 0 \\ 0 & ; \lambda \leq 0 \end{cases}$$

then the Bayes estimator of  $1/\lambda$  with respect to the squared error loss function is

1.  $\frac{2}{X+1}$

2.  $\frac{1}{X}$

3.  $X$

4.  $\frac{X+1}{2}$

56. रैखिक सांख्यिकीय प्रतिमान

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

पर विचारें जहां  $\mu$  अज्ञात है,  $\tau_i$  स्वतंत्रतः तथा सर्वथासमानतः  $N(0, \sigma_\tau^2)$ , जैसे बंटित है,  $\varepsilon_{ij}$  स्वतंत्रतः तथा सर्वथा समानतः  $N(0, \sigma^2)$  के रूप में बंटित है; सभी  $i$  तथा  $j$  के लिए  $\tau_i$  तथा  $\varepsilon_{ij}$  स्वतंत्र हैं। गौर करें कि  $i^{\text{th}}$  उपचार का प्रभाव  $\tau_i$  है। मानें कि  $SS_{\text{total}}, SS_{\text{treatment}}, SS_{\text{error}}$  क्रमशः कुल वर्गों का योगफल, कुल उपचार वर्गों का योगफल तथा त्रुटि वर्गों का योगफल हैं।

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0 \text{ बनाम } H_A: \sigma_\tau^2 > 0$$

के परीक्षण हेतु निम्न कथनों में से कौन-सा सही नहीं है?

1. वर्गों के योगफल की सर्वसमिका है

$$SS_{total} = SS_{treatment} + SS_{error}$$

2.  $SS_{error} \sim \sigma^2 \chi^2_{n(a-1)}$

3.  $H_0$ , के अधीन  $\frac{SS_{treatment}}{\frac{SS_{error}}{n(a-1)}} \sim F_{a-1, n(a-1)}$

4.  $E(SS_{error}) = n(a-1)(\sigma^2 + n\sigma_\tau^2)$

56. Consider the linear statistical model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

where  $\mu$  is unknown,  $\tau_i$  are independently and identically distributed as  $N(0, \sigma_\tau^2)$ ,  $\varepsilon_{ij}$  are independently and identically distributed as  $N(0, \sigma^2)$ ;  $\tau_i$  and  $\varepsilon_{ij}$  are independent for all  $i$  and  $j$ . Note that  $\tau_i$  is the  $i^{th}$  treatment effect. Suppose  $SS_{total}, SS_{treatment}, SS_{error}$  are total sum of squares, total treatment sum of squares and error sum of squares, respectively.

To test  $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$  vs  $H_A: \sigma_\tau^2 > 0$  which of the following statements is **not** true?

1. The sum of squares identity is

$$SS_{total} = SS_{treatment} + SS_{error}$$

2.  $SS_{error} \sim \sigma^2 \chi^2_{n(a-1)}$

3. Under  $H_0$ ,  $\frac{SS_{treatment}}{\frac{SS_{error}}{n(a-1)}} \sim F_{a-1, n(a-1)}$

4.  $E(SS_{error}) = n(a-1)(\sigma^2 + n\sigma_\tau^2)$

57. मानें कि  $(X_1, X_2)$  द्विचर प्रसामान्य बंटन का अनुकरण करता है,  $E(X_1) = E(X_2) = 0$ ,  $V(X_1) = V(X_2) = 2$  तथा  $Cov(X_1, X_2) = -1$  के साथ। यदि

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy \text{ है,}$$

तो  $P[X_1 - X_2 > 6]$  इस समान है:

1.  $\Phi(-1)$

2.  $\Phi(-3)$

3.  $\Phi(\sqrt{6})$

4.  $\Phi(-\sqrt{6})$

57. Suppose  $(X_1, X_2)$  follows a bivariate normal distribution with  $E(X_1) = E(X_2) = 0$ ,  $V(X_1) = V(X_2) = 2$  and  $Cov(X_1, X_2) = -1$ . If  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ , then  $P[X_1 - X_2 > 6]$  is equal to

1.  $\Phi(-1)$

2.  $\Phi(-3)$

3.  $\Phi(\sqrt{6})$

4.  $\Phi(-\sqrt{6})$

58. आमाप 20 वाली परिमित समष्टि से आमाप 2 के एक प्रतिदर्श निकालने की समस्या पर विचारों। प्रतियचन योजना 'आमाप के अनुपात में प्रायिकता' के उपयोग से पुनःस्थापन के साथ प्रतियचन किया जाता है। मानकित आमाप माप  $p_1, \dots, p_{20}$  इससे दिये जाते हैं:  $p_i = \frac{1}{40}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ ,  $p_i = \frac{3}{40}$ ,  $i = 11, \dots, 20$ .

निकाली गयी सुस्पष्ट इकाइयों की प्रत्याशित संख्या है।

1.  $\frac{83}{80}$

2.  $\frac{157}{80}$

3.  $\frac{17}{16}$

4.  $\frac{31}{16}$

58. Consider the problem of drawing a sample of size 2 from a finite population of size 20. The sampling is done with replacement using probability proportional to size sampling scheme. The normed size measures  $p_1, \dots, p_{20}$  are given by  $p_i = \frac{1}{40}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ ,  $p_i = \frac{3}{40}$ ,  $i = 11, \dots, 20$ .

The expected number of distinct units drawn is

1.  $\frac{83}{80}$

2.  $\frac{157}{80}$

3.  $\frac{17}{16}$

4.  $\frac{31}{16}$

59. यदि हम लैटिन वर्ग अभिकल्पना (LSD), के दो स्तंभों को आपस में विनिमय करते हैं, तो नयी अभिकल्पना है

1. एक LSD
2. एक पूर्णतः यादृच्छीकृत अभिकल्पना (CRD) परंतु एक LSD नहीं।
3. एक यादृच्छीकृत खंड अभिकल्पना (RBD) परंतु एक LSD नहीं।
4. एक संतुलित अपूर्ण खंड अभिकल्पना (BIBD) परंतु एक LSD नहीं।

59. If we interchange two columns of a Latin square design (LSD), then the new design is

1. an LSD
2. a completely randomised design (CRD) but not an LSD
3. a randomised block design (RBD) but not an LSD
4. a balanced incomplete block design (BIBD) but not an LSD

60. रैखिक प्रोग्रामन समस्या (LPP) पर विचारें:

$c^t x$  का न्यूनिकरण प्रतिबंध  $Ax = b, x \geq 0$ , जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$c = (2, -1, 1, -9, 0)^t$ , तथा

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$  हैं, के अधीन करें।

संशोधित एकल प्रविधि, चलित आधार  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

के उपयोग द्वारा पाये जाने वाला सही निष्कर्ष निम्न में से कौन-सा है?

1. अगला प्रवेश करता चर  $x_5$  है।
2. चलित आधार से संगत हल इष्टतम है।
3. अगला प्रवेश करता चर  $x_4$  है।
4. अगला प्रवेश करता चर  $x_3$  है।

60. Consider the LPP:

Minimize  $c^t x$  subject to  $Ax = b, x \geq 0$ , where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$c = (2, -1, 1, -9, 0)^t$ , and

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ .

Using the revised simplex method with current basis as  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , which of the following statements is correct?

1. The next entering variable is  $x_5$
2. The solution corresponding to the current basis is optimal
3. The next entering variable is  $x_4$
4. The next entering variable is  $x_3$

## भाग \ PART 'C'

### Unit-1

61. मानें कि  $\alpha = 0.10110111011110 \dots$  एक दी गई, आधार 10 में लिखी हुई एक वास्तविक संख्या है, अर्थात्,  $\alpha$  का  $n$ -th अंक 1 है, जब तक  $n, \frac{k(k+1)}{2} - 1$  के रूप में नहीं है, अगर है तो उसका मान शून्य है। निम्न में से सभी सही कथनों को चुनें।

1.  $\alpha$  एक परिमेय संख्या है।
2.  $\alpha$  एक अपरिमेय संख्या है।
3. हर पूर्णांक  $q \geq 2$  के लिए ऐसे एक पूर्णांक  $r \geq 1$  का अस्तित्व है ताकि  $\frac{r}{q} < \alpha < \frac{r+1}{q}$  हो।
4.  $\alpha$  का कोई आवर्ती दशमिक प्रसार नहीं है।

61. Let  $\alpha = 0.10110111011110 \dots$  be a given real number written in base 10, that is, the  $n$ -th digit of  $\alpha$  is 1, unless  $n$  is of the form  $\frac{k(k+1)}{2} - 1$  in which case it is 0. Choose all the correct statements from below.

1.  $\alpha$  is a rational number
2.  $\alpha$  is an irrational number
3. For every integer  $q \geq 2$ , there exists an integer  $r \geq 1$  such that  $\frac{r}{q} < \alpha < \frac{r+1}{q}$ .
4.  $\alpha$  has no periodic decimal expansion.

62.  $a, b \in \mathbb{N}$  के लिए, अनुक्रम

$$d_n = \frac{\binom{n}{a}}{\binom{n}{b}}, n > a, b$$

के लिए, पर विचारें। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं? जब  $n \rightarrow \infty$ ,

1.  $\{d_n\}$   $a$  तथा  $b$  के सभी मानों के लिए अभिसरित होता है।
2.  $\{d_n\}$  अभिसरित होता है यदि  $a < b$  है।
3.  $\{d_n\}$  अभिसरित होता है यदि  $a = b$  है।
4.  $\{d_n\}$  अभिसरित होता है यदि  $a > b$  है।

62. For  $a, b \in \mathbb{N}$ , consider the sequence

$$d_n = \frac{\binom{n}{a}}{\binom{n}{b}}$$

for  $n > a, b$ . Which of the following statements are true? As  $n \rightarrow \infty$ ,

1.  $\{d_n\}$  converges for all values of  $a$  and  $b$
2.  $\{d_n\}$  converges if  $a < b$
3.  $\{d_n\}$  converges if  $a = b$
4.  $\{d_n\}$  converges if  $a > b$

63. मानें कि  $\{a_n\}$  वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम है जो  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < \infty$  का समाधान करता है। तो श्रेणी  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  अभिसारी है

1.  $\mathbb{R}$  पर कहीं भी नहीं।
2.  $\mathbb{R}$  पर सर्वत्र।
3.  $(-1, 1)$  अंतर्विष्ट करते किसी समुच्चय पर।
4. मात्र  $(-1, 1)$  पर।

63. Let  $\{a_n\}$  be a sequence of real numbers satisfying  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < \infty$ . Then the series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  is convergent

1. nowhere on  $\mathbb{R}$
2. everywhere on  $\mathbb{R}$
3. on some set containing  $(-1, 1)$
4. only on  $(-1, 1)$

64. मानें कि  $f(x) = \tan^{-1} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . तो

1. सभी  $x$  के लिए  $p(x)f'(x) = 1$  का समाधान करता हुआ एक बहुपद  $p(x)$  का अस्तित्व है।
2. सभी धन सम पूर्णांक  $n$  के लिए  $f^{(n)}(0) = 0$  है।
3. अनुक्रम  $\{f^{(n)}(0)\}$  अपरिबद्ध है।
4.  $f^{(n)}(0) = 0$ , सभी  $n$  के लिए।

64. Let  $f(x) = \tan^{-1} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Then

1. there exists a polynomial  $p(x)$  satisfying  $p(x)f'(x) = 1$ , for all  $x$
2.  $f^{(n)}(0) = 0$  for all positive even integers  $n$
3. the sequence  $\{f^{(n)}(0)\}$  is unbounded
4.  $f^{(n)}(0) = 0$  for all  $n$

65. मानें कि  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$  है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1.  $[0, 1]$  पर  $f_n$  बिंदुशः एक संतत फलन तक अभिसरित होता है।
2.  $[0, 1]$  पर  $f_n$  एकसमानतः अभिसरित होता है।
3.  $[\frac{1}{2}, 1]$  पर  $f_n$  एकसमानतः अभिसरित होता है।
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$

65. Let  $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$  for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Which of the following are true?

1.  $f_n$  converges pointwise on  $[0, 1]$  to a continuous function
2.  $f_n$  converges uniformly on  $[0, 1]$
3.  $f_n$  converges uniformly on  $[\frac{1}{2}, 1]$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$

66. यदि  $n \in \mathbb{N}$  के लिए  $\lambda_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n}$  है, तो

1. कुछ  $n$  के लिए  $\lambda_n$  का अस्तित्व नहीं होता।
2. हर  $n$  के लिए  $\lambda_n$  का अस्तित्व है तथा अनुक्रम अपरिबद्ध है।
3. हर  $n$  के लिए  $\lambda_n$  का अस्तित्व है तथा अनुक्रम परिबद्ध है।
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$

66. If  $\lambda_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n}$  for  $n \in \mathbb{N}$ , then
1.  $\lambda_n$  does not exist for some  $n$
  2.  $\lambda_n$  exists for every  $n$  and the sequence is unbounded
  3.  $\lambda_n$  exists for every  $n$  and the sequence is bounded
  4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$

## 67. समीकरण

$$11^x + 13^x + 17^x - 19^x = 0$$

1. का कोई वास्तविक मूल नहीं है।
2. का मात्र एक वास्तविक मूल है।
3. के यथार्थतः दो वास्तविक मूल हैं।
4. के दो से अधिक वास्तविक मूल हैं।

## 67. The equation

$$11^x + 13^x + 17^x - 19^x = 0 \text{ has}$$

1. no real root
2. only one real root
3. exactly two real roots
4. more than two real roots

68. मानें कि  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(\underline{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$ , से दिया जाता है, जहां  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  तथा कम से कम एक  $a_j$  शून्येतर है। तो हम यह निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

1.  $f$  सर्वत्र अवकलनीय नहीं है।
2. हर  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  के लिए प्रवणता  $(\nabla f)(\underline{x}) \neq 0$  है।
3. यदि  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  ऐसा है कि  $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$ , तो  $f(\underline{x}) = 0$  है।
4. यदि  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  ऐसा है कि  $f(\underline{x}) = 0$ , तो  $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$  है।

68. Suppose that  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is given by  $f(\underline{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$ , where  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  and at least one  $a_j$  is not zero. Then we can conclude that

1.  $f$  is not everywhere differentiable
2. the gradient  $(\nabla f)(\underline{x}) \neq 0$  for every  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

3. if  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  is such that  $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$  then  $f(\underline{x}) = 0$
4. if  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  is such that  $f(\underline{x}) = 0$  then  $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$

69. मानें कि  $S, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  का समुच्चय है ताकि

$$\frac{x^\alpha y^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0 \text{ जब } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

तो  $S$  इसमें अंतर्विष्ट है:

1.  $\{(\alpha, \beta): \alpha > 0, \beta > 0\}$
2.  $\{(\alpha, \beta): \alpha > 2, \beta > 2\}$
3.  $\{(\alpha, \beta): \alpha + \beta > 1\}$
4.  $\{(\alpha, \beta): \alpha + 4\beta > 1\}$

69. Let  $S$  be the set of  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  such that

$$\frac{x^\alpha y^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0 \text{ as } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Then  $S$  is contained in

1.  $\{(\alpha, \beta): \alpha > 0, \beta > 0\}$
2.  $\{(\alpha, \beta): \alpha > 2, \beta > 2\}$
3.  $\{(\alpha, \beta): \alpha + \beta > 1\}$
4.  $\{(\alpha, \beta): \alpha + 4\beta > 1\}$

70. घात  $n$  से कम या  $n$  के समान के वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि  $V$  पर विचारें। भिन्न वास्तविक संख्याओं  $a_0, a_1, \dots, a_k$  को तय करें।  $p \in V$  के लिए,

$$\text{उच्च } \{|p(a_j)| : 0 \leq j \leq k\}$$

$V$  पर एक मानक की परिभाषा करता है

1. मात्र यदि  $k < n$
2. मात्र यदि  $k \geq n$
3. यदि  $k + 1 \leq n$
4. यदि  $k \geq n + 1$

70. Consider the vector space  $V$  of real polynomials of degree less than or equal to  $n$ . Fix distinct real numbers  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . For  $p \in V$ 

$$\max\{|p(a_j)| : 0 \leq j \leq k\}$$

defines a norm on  $V$

1. only if  $k < n$
2. only if  $k \geq n$
3. if  $k + 1 \leq n$
4. if  $k \geq n + 1$

71. मानें कि  $V$ , अधिक से अधिक 3 घात वाले  $\mathbb{R}$  में गुणांक रखने वाले, चर  $x$  के बहुपदों की सदिश समष्टि है। मानें कि  $T = d/dx$ ,  $V$  से उसी तक एक रैखिक रूपांतरण है, जो अवकलन से दिया जाता है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1.  $T$  व्युत्क्रमणीय है।
2.  $T$  का एक अभिलक्षणिक मान 0 है।
3. ऐसे एक आधार है जिसके सापेक्ष  $T$  का आव्यूह शून्यभावी है।
4.  $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$  आधार के सापेक्ष  $T$  का आव्यूह विकर्ण है।

71. Let  $V$  be the vector space of polynomials of degree at most 3 in a variable  $x$  with coefficients in  $\mathbb{R}$ . Let  $T = d/dx$  be the linear transformation of  $V$  to itself given by differentiation. Which of the following are correct?

1.  $T$  is invertible
2. 0 is an eigenvalue of  $T$
3. There is a basis with respect to which the matrix of  $T$  is nilpotent.
4. The matrix of  $T$  with respect to the basis  $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$  is diagonal

72. मानें कि  $m, n, r$  प्राकृतिक संख्यायें हैं। मानें कि  $A$  वास्तविक प्रविष्टियां युक्त एक  $m \times n$  आव्यूह है ताकि  $(AA^t)^r = I$ , जहां  $I$  एक  $m \times m$  तत्समक आव्यूह है, तथा  $A^t$ , आव्यूह  $A$  का परिवर्त है। हम यह निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

1.  $m = n$
2.  $AA^t$  व्युत्क्रमणीय है।
3.  $A^t A$  व्युत्क्रमणीय है।
4. यदि  $m = n$  है, तो  $A$  व्युत्क्रमणीय है।

72. Let  $m, n, r$  be natural numbers. Let  $A$  be an  $m \times n$  matrix with real entries such that  $(AA^t)^r = I$ , where  $I$  is the  $m \times m$

identity matrix and  $A^t$  is the transpose of the matrix  $A$ . We can conclude that

1.  $m = n$
2.  $AA^t$  is invertible
3.  $A^t A$  is invertible
4. if  $m = n$ , then  $A$  is invertible

73. मानें कि  $A$  एक  $n \times n$  वास्तविक आव्यूह है,  $A^2 = A$  के साथ। तो

1.  $A$  के अभिलक्षणिक मान या तो 0 या 1 हैं।
2.  $A$  एक विकर्ण आव्यूह है जिसकी विकर्ण प्रविष्टियां 0 या 1 हैं।
3. जाति  $(A) =$  अनुरेख  $(A)$
4. जाति  $(I - A) =$  अनुरेख  $(I - A)$

73. Let  $A$  be an  $n \times n$  real matrix with  $A^2 = A$ . Then

1. the eigenvalues of  $A$  are either 0 or 1
2.  $A$  is a diagonal matrix with diagonal entries 0 or 1
3.  $\text{rank}(A) = \text{trace}(A)$
4.  $\text{rank}(I - A) = \text{trace}(I - A)$

74. किसी  $n \times n$  आव्यूह  $B$  के लिए, मानें कि  $B$  की शून्य समष्टि  $N(B) = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = 0\}$  है। मानें कि  $A$  एक  $4 \times 4$  आव्यूह है  $\dim(N(A - 2I)) = 2$ ,

$\dim(N(A - 4I)) = 1$  तथा जाति  $(A) = 3$  के साथ। तो

1.  $A$  के अभिलक्षणिक मान 0, 2 तथा 4 हैं।
2. सारणिक  $(A) = 0$
3.  $A$  विकर्णनीय नहीं है।
4. अनुरेख  $(A) = 8$

74. For any  $n \times n$  matrix  $B$ , let  $N(B) = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = 0\}$  be the null space of  $B$ . Let  $A$  be a  $4 \times 4$  matrix with  $\dim(N(A - 2I)) = 2$ ,  $\dim(N(A - 4I)) = 1$  and  $\text{rank}(A) = 3$ . Then

1. 0, 2 and 4 are eigenvalues of  $A$
2. determinant  $(A) = 0$
3.  $A$  is not diagonalizable
4.  $\text{trace}(A) = 8$

75.  $\mathbb{R}$  पर निम्न  $3 \times 3$  आव्यूहों में से कौन-से विकर्णनीय हैं?

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

75. Which of the following  $3 \times 3$  matrices are diagonalizable over  $\mathbb{R}$ ?

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

76. मानें कि  $H$  एक वास्तविक हिल्बर्ट समष्टि है तथा  $M \subseteq H$  एक संवृत रेखिक उपसमष्टि है। मानें कि  $x_0 \in H \setminus M$  है। मानें कि  $y_0 \in M$  ताकि  $\|x_0 - y_0\| = \inf \{\|x_0 - y\| : y \in M\}$  है। तो

1. ऐसा एक  $y_0$  अद्वितीय है।
2.  $x_0 \perp M$
3.  $y_0 \perp M$
4.  $x_0 - y_0 \perp M$

76. Let  $H$  be a real Hilbert space and  $M \subseteq H$  be a closed linear subspace. Let  $x_0 \in H \setminus M$ . Let  $y_0 \in M$  be such that  $\|x_0 - y_0\| = \inf \{\|x_0 - y\| : y \in M\}$ .

Then

1. such a  $y_0$  is unique
2.  $x_0 \perp M$
3.  $y_0 \perp M$
4.  $x_0 - y_0 \perp M$

77. मानें कि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $X \in \mathbb{R}^3$  के लिए  $Q(X) = X^t A X$ , तो

1.  $A$  के ठीक-ठीक दो धन अभिलक्षणिक मान हैं।
2.  $A$  के सभी अभिलक्षणिक मान धन हैं।
3.  $Q(X) \geq 0$  सभी  $X \in \mathbb{R}^3$  के लिए।
4.  $Q(X) < 0$  कुछ  $X \in \mathbb{R}^3$  के लिए।

77. Let  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  and

$Q(X) = X^t A X$  for  $X \in \mathbb{R}^3$ . Then

1.  $A$  has exactly two positive eigenvalues
2. all the eigenvalues of  $A$  are positive
3.  $Q(X) \geq 0$  for all  $X \in \mathbb{R}^3$
4.  $Q(X) < 0$  for some  $X \in \mathbb{R}^3$

78. आव्यूह

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 7 & 11 \\ 3x & 2x & 4 \\ 8x & 17 & 13 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}.$$

पर विचारें। तो

1.  $A(x)$  का अभिलक्षणिक मान 0 है कुछ  $x \in \mathbb{R}$  के लिए।
2. किसी भी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $A(x)$  का एक अभिलक्षणिक मान 0 नहीं है।
3. सभी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $A(x)$  का अभिलक्षणिक मान 0 है।
4. हर  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $A(x)$  व्युत्क्रमणीय है।

78. Consider the matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 7 & 11 \\ 3x & 2x & 4 \\ 8x & 17 & 13 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}.$$

Then

1.  $A(x)$  has eigenvalue 0 for some  $x \in \mathbb{R}$
2. 0 is not an eigenvalue of  $A(x)$  for any  $x \in \mathbb{R}$
3.  $A(x)$  has eigenvalue 0 for all  $x \in \mathbb{R}$
4.  $A(x)$  is invertible for every  $x \in \mathbb{R}$

Unit-2

79. मानें कि  $f = u + iv$  एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है जहां  $f$  के वास्तविक तथा अधिकल्पित भाग क्रमशः  $u, v$  हैं। यदि सभी  $a \in \mathbb{C}$  के लिए जैकोबी आव्यूह  $J_a = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$  सममित है, तो

1.  $f$  एक बहुपद है।
2.  $f$  घात  $\leq 1$  का एक बहुपद है।
3.  $f$  आवश्यकतः एक अचर फलन है।
4.  $f$  एक बहुपद है जिसका घात दृढ़तः 1 से अधिक है।

79. Let  $f = u + iv$  be an entire function where  $u, v$  are the real and imaginary parts of  $f$  respectively. If the Jacobian matrix

$$J_a = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$$

is symmetric for all  $a \in \mathbb{C}$ , then

1.  $f$  is a polynomial.
2.  $f$  is a polynomial of degree  $\leq 1$ .
3.  $f$  is necessarily a constant function.
4.  $f$  is a polynomial of degree strictly greater than 1.

80. फलन  $f(z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sin(\pi z)}$  पर विचारें। तो  $f$  के अनंतक हैं

1. सभी पूर्णाकों पर।
2. सभी सम पूर्णाकों पर।
3. सभी विषम पूर्णाकों पर।
4. रूप  $4k + 1, k \in \mathbb{Z}$  के सभी पूर्णाकों पर।

80. Consider the function  $f(z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sin(\pi z)}$ .

Then  $f$  has poles at

1. all integers
2. all even integers
3. all odd integers
4. all integers of the form  $4k + 1, k \in \mathbb{Z}$

81. मोबियस रूपांतरण  $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$  पर विचारें। यदि  $C$  उद्गम से गुजरता हुआ धन त्रिज्या युक्त एक वृत्त को निर्दिष्ट करता है, तो  $C \setminus \{0\}$  को  $f$  मानचित्रित करता है

1. एक वृत्त तक।
2. एक रेखा तक।
3. उद्गम से गुजरते एक रेखा तक।
4. उद्गम से नहीं गुजरते एक रेखा तक।

81. Consider the Möbius transformation  $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ . If  $C$  denotes a circle with positive radius passing through the origin, then  $f$  maps  $C \setminus \{0\}$  to

1. a circle.
2. a line.
3. a line passing through the origin.
4. a line not passing through the origin.

82.  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  पर परिभाषित निम्न फलनों  $f(z)$  में से किसके लिए,  $G$  के संहत उपसमुच्चयों पर  $f(z)$  को एकसमानतः सन्निकटित करते बहुपदों का कोई अनुक्रम नहीं है?

- |              |            |
|--------------|------------|
| 1. $\exp(z)$ | 2. $1/z$   |
| 3. $z^2$     | 4. $1/z^2$ |

82. For which among the following functions  $f(z)$  defined on  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , is there no sequence of polynomials approximating  $f(z)$  uniformly on compact subsets of  $G$ ?

- |              |            |
|--------------|------------|
| 1. $\exp(z)$ | 2. $1/z$   |
| 3. $z^2$     | 4. $1/z^2$ |

83. एक पूर्णाक  $n \geq 2$  के लिए, मानें कि  $n$  अक्षरों पर क्रमचय समूह  $S_n$  है तथा  $A_n$  एकांतर समूह है। मानें कि, गुणन के अंदर शून्यतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह  $\mathbb{C}^*$  है। निम्न में से सही कथन कौन-से हैं?

1. हर पूर्णाक  $n \geq 2$  के लिए, एक अतुच्छ समाकारिता  $\chi: S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  है।
2. हर पूर्णाक  $n \geq 2$  के लिए, एक अद्वितीय अतुच्छ समाकारिता  $\chi: S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  है।

3. हर पूर्णांक  $n \geq 3$  के लिए, एक अतुच्छ समाकारिता  $\chi: A_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  है।
4. हर पूर्णांक  $n \geq 5$ , के लिए, एक अतुच्छ समाकारिता  $\chi: A_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  नहीं है।
83. For an integer  $n \geq 2$ , let  $S_n$  be the permutation group on  $n$  letters and  $A_n$  the alternating group. Let  $\mathbb{C}^*$  be the group of non-zero complex numbers under multiplication. Which of the following are correct statements?
1. For every integer  $n \geq 2$ , there is a nontrivial homomorphism  $\chi: S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
  2. For every integer  $n \geq 2$ , there is a unique nontrivial homomorphism  $\chi: S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
  3. For every integer  $n \geq 3$ , there is a nontrivial homomorphism  $\chi: A_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
  4. For every integer  $n \geq 5$ , there is no nontrivial homomorphism  $\chi: A_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
84. प्रथम दस धन पूर्णाकों के समुच्चय  $\{1, 2, \dots, 10\}$  पर, सभी  $\mathbb{Z}_2$ -मान के फलनों के समुच्चय को मानें कि  $R = \{f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$ । तो फलनों के बिंदुशः गुणन तथा बिंदुशः योग युक्त एक क्रमविनिमेय वलय  $R$  है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?
1.  $R$  की एक अद्वितीय उच्चिष्ठ गुणजावली है।
  2.  $R$  की प्रत्येक अभाज्य गुणजावली, उच्चिष्ठ भी है।
  3.  $R$  की उचित गुणजावलियों की संख्या 511 है।
  4.  $R$  का हर अवयव वर्गसम है।
84. Let  $R = \{f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$  be the set of all  $\mathbb{Z}_2$ -valued functions on the set  $\{1, 2, \dots, 10\}$  of the first ten positive integers. Then  $R$  is commutative ring with pointwise addition and pointwise multiplication of functions. Which of the following statements are correct?
1.  $R$  has a unique maximal ideal.
  2. Every prime ideal of  $R$  is also maximal.
  3. Number of proper ideals of  $R$  is 511.
  4. Every element of  $R$  is idempotent.
85. निम्न वलयों में से कौन-से मुख्य गुणजावली प्रांत (PID) हैं?
1.  $\mathbb{Q}[x]$
  2.  $\mathbb{Z}[x]$
  3.  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$
  4.  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]$
85. Which of the following rings are principal ideal domains (PID)?
1.  $\mathbb{Q}[x]$
  2.  $\mathbb{Z}[x]$
  3.  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$
  4.  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]$
86. मानें कि  $G$  एक समूह है कोटि 125 का। निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकतः सही हैं?
1.  $G$  का एक अतुच्छ आबेली उपसमूह है।
  2.  $G$  का केंद्र एक उचित उपसमूह है।
  3.  $G$  के केंद्र की कोटि 5 है।
  4. कोटि 25 का एक उपसमूह है।
86. Let  $G$  be a group of order 125. Which of the following statements are necessarily true?
1.  $G$  has a non-trivial abelian subgroup
  2. The centre of  $G$  is a proper subgroup
  3. The centre of  $G$  has order 5
  4. There is a subgroup of order 25
87. मानें कि  $R$  तत्समक युक्त एक शून्येतर वलय है, सभी  $a \in R$  के लिए  $a^2 = a$  है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं ?
1. ऐसा कोई वलय नहीं होता।
  2. सभी  $a \in R$  के लिए  $2a = 0$  है।
  3. सभी  $a \in R$  के लिए  $3a = 0$  है।
  4.  $R$  का एक उपवलय  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  है।
87. Let  $R$  be a non-zero ring with identity such that  $a^2 = a$  for all  $a \in R$ . Which of the following statements are true?
1. There is no such ring
  2.  $2a = 0$  for all  $a \in R$
  3.  $3a = 0$  for all  $a \in R$
  4.  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is a subring of  $R$

88.  $\mathbb{Z}[x]$  में निम्न बहुपदों में कौन-से अलगुकरणीय हैं ?

1.  $x^4 + 10x + 5$
2.  $x^3 - 2x + 1$
3.  $x^4 + x^2 + 1$
4.  $x^3 + x + 1$

88. Which of the following polynomials are irreducible in  $\mathbb{Z}[x]$ ?

1.  $x^4 + 10x + 5$
2.  $x^3 - 2x + 1$
3.  $x^4 + x^2 + 1$
4.  $x^3 + x + 1$

89. मानें कि  $X$  कोई सांस्थितिक समष्टि है। मानें कि  $A \subseteq X$  अरिक्त है।  $x, y \in A$  के लिए  $x \sim y$  परिभाषित करें यदि एक संबंधित उपसमुच्चय  $C \subseteq A$  है ताकि  $x, y \in C$  हो।  $x \in A$  के लिए, परिभाषित करें कि

$C(x) = \{y \in A : y \sim x\}$  है, तो

1.  $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$
2.  $C(x) = C(y) \Rightarrow x \sim y$
3.  $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$
4.  $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow C(x) = C(y)$

89. Let  $X$  be any topological space. Let  $A \subseteq X$  be nonempty. For  $x, y \in A$ , define  $x \sim y$  if there is a connected subset  $C \subseteq A$  such that  $x, y \in C$ . For  $x \in A$ , define  $C(x) = \{y \in A : y \sim x\}$ . Then

1.  $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$
2.  $C(x) = C(y) \Rightarrow x \sim y$
3.  $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$
4.  $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow C(x) = C(y)$

90. मानें कि  $X$  एक सांस्थितिक समष्टि है, तथा  $X$  की एक उपसमष्टि  $Y$  है। लिखें कि  $i: Y \rightarrow X$ , आविष्टि प्रतिचित्र के लिए। सही कथन(नों) को चुनें :

1. यदि  $Y$  की उपसमष्टि सांस्थितिकी है, तो  $i$  संतत है।
2. यदि  $i$  संतत है, तो  $Y$  की उपसमष्टि सांस्थितिकी है।

3. यदि  $X$  की विवृत उपसमष्टि  $Y$  है, तो  $i(U), Y$  पर उपसमष्टि सांस्थितिकी में विवृत सभी उपसमुच्चयों  $U \subseteq Y$  के लिए,  $X$  में विवृत है।
4. यदि  $X$  की संहत उपसमष्टि  $Y$  है, तो  $i(U), Y$  पर उपसमष्टि सांस्थितिकी में विवृत सभी उपसमुच्चयों  $U \subseteq Y$  के लिए,  $X$  में विवृत है।

90. Let  $X$  be a topological space and  $Y$  a subset of  $X$ . Write  $i: Y \rightarrow X$  for the inclusion map. Choose the correct statement(s):

1. If  $Y$  has the subspace topology, then  $i$  is continuous
2. If  $i$  is continuous, then  $Y$  has the subspace topology
3. If  $Y$  is an open subset of  $X$ , then  $i(U)$  is open in  $X$  for all subsets  $U \subseteq Y$  that are open in the subspace topology on  $Y$
4. If  $Y$  is a compact subset of  $X$ , then  $i(U)$  is open in  $X$  for all subsets  $U \subseteq Y$  that are open in the subspace topology on  $Y$

### Unit-3

91. साधारण अवकल समीकरण

$$y'(t) = -y^3 + y^2 + 2y,$$

$y(0) = y_0 \in (0, 2)$  के अधीन, के हल पर विचारें। तो

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  इसका सदस्य है:

- |                |                     |
|----------------|---------------------|
| 1. $\{-1, 0\}$ | 2. $\{-1, 2\}$      |
| 3. $\{0, 2\}$  | 4. $\{0, +\infty\}$ |

91. Consider the solution of the ordinary differential equation

$$y'(t) = -y^3 + y^2 + 2y \text{ subject to } y(0) = y_0 \in (0, 2). \text{ Then}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  belongs to

- |                |                     |
|----------------|---------------------|
| 1. $\{-1, 0\}$ | 2. $\{-1, 2\}$      |
| 3. $\{0, 2\}$  | 4. $\{0, +\infty\}$ |

92. यदि

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = y^2 + x^2 & , x > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

के हल का अस्तित्व अंतराल  $[0, L_0)$  में हैं, तथा

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = z^2 & , x > 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

के अस्तित्व का उच्चिष्ठ अंतराल  $[0, L_1)$  है, तो निम्न कथनों में कौन-से सही हैं?

1.  $L_1 = 1, L_0 > 1$
2.  $L_1 = 1, L_0 \leq 1$
3.  $L_1 < 2, L_0 \leq 1$
4.  $L_1 > 2, L_0 < 1$

92. If the solution to

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = y^2 + x^2 & , x > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

exists in the interval  $[0, L_0)$  and the maximal interval of existence of

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = z^2 & , x > 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

is  $[0, L_1)$ , then which of the following statements are correct?

1.  $L_1 = 1, L_0 > 1$
2.  $L_1 = 1, L_0 \leq 1$
3.  $L_1 < 2, L_0 \leq 1$
4.  $L_1 > 2, L_0 < 1$

93.  $xy = 1$  पर  $u = 5$  के अधीन, आंशिक अवकल समीकरण

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = -xy \text{ for } x > 0 \text{ पर विचारें।}$$

तो

1. जब  $xy \leq 19$  है तो  $u(x, y)$  का अस्तित्व है तथा  $x > 0, y > 0$  के लिए  $u(x, y) = u(y, x)$  है।

2. जब  $xy \geq 19$  है तो  $u(x, y)$  का अस्तित्व है तथा  $x > 0, y > 0$  के लिए

$$u(x, y) = u(y, x) \text{ है।}$$

3.  $u(1, 11) = 3, u(13, -1) = 7$

4.  $u(1, -1) = 5, u(11, 1) = -5$

93. Consider the partial differential equation  $x \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = -xy$  for  $x > 0$  subject to  $u = 5$  on  $xy = 1$ . Then

1.  $u(x, y)$  exists when  $xy \leq 19$  and  $u(x, y) = u(y, x)$  for  $x > 0, y > 0$

2.  $u(x, y)$  exists when  $xy \geq 19$  and  $u(x, y) = u(y, x)$  for  $x > 0, y > 0$

3.  $u(1, 11) = 3, u(13, -1) = 7$

4.  $u(1, -1) = 5, u(11, 1) = -5$

94. आंशिक अवकल समीकरण

$$x(p^2 + q^2) = zp; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

का संपूर्ण समाकल यदि वक्र  $x = 0, z^2 = 4y$ , से गुजरता है तो  $x = 1$  तथा  $y = 1$  से गुजरते इस कुटुंब का अन्वालोप समाधान करता है:

1.  $z = -2$
2.  $z = 2$
3.  $z = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$
4.  $z = -\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$

94. If a complete integral of the partial differential equation

$$x(p^2 + q^2) = zp; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

passes through the curve  $x = 0, z^2 = 4y$ , then the envelope of this family passing through  $x = 1$  and  $y = 1$  has

1.  $z = -2$
2.  $z = 2$
3.  $z = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$
4.  $z = -\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$

95. एक अवकलनीय फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  के लिए अंतर विभाग की परिभाषा करें कि

$$(D_x f)(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad h > 0.$$

रूप  $\hat{h} = h(1 + \epsilon)$  की संख्याओं पर विचारें

एक नियत  $\epsilon > 0$  के लिए, तथा मानें कि

$$e_1(h) = f'(x) - (D_x f)(h),$$

$$e_2(h) = (D_x f)(h) - (D_x f)(\hat{h}),$$

$$e(h) = e_1(h) + e_2(h).$$

यदि  $f(x + \hat{h}) = f(x + h)$  है तो

1.  $e_1(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .
2.  $e_2(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .
3.  $e_2(h) \rightarrow \epsilon f'(x)/(1 + \epsilon)$  as  $h \rightarrow 0$ .
4.  $e(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .

95. For a differentiable function  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  define the difference quotient

$$(D_x f)(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad h > 0.$$

Consider numbers of the form  $\hat{h} = h(1 + \epsilon)$  for a fixed  $\epsilon > 0$  and let

$$e_1(h) = f'(x) - (D_x f)(h),$$

$$e_2(h) = (D_x f)(h) - (D_x f)(\hat{h}),$$

$$e(h) = e_1(h) + e_2(h).$$

If  $f(x + \hat{h}) = f(x + h)$ , then

1.  $e_1(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .
2.  $e_2(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .
3.  $e_2(h) \rightarrow \epsilon f'(x)/(1 + \epsilon)$  as  $h \rightarrow 0$ .
4.  $e(h) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ .

96. मानें कि  $y_n = y_{n-1} + h y_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )  $y_0 = 1$  के साथ को  $y_n$  समाधान करता है तथा  $0 < h < 1$  के लिए,  $Nh = 1$ . तो

1.  $y_N \rightarrow e$  as  $N \rightarrow \infty$
2.  $y_N \rightarrow e^h$  as  $N \rightarrow \infty$
3.  $y_n = (1 + h)^n$
4.  $y_n \geq 1$

96. Let  $y_n$  satisfy  $y_n = y_{n-1} + h y_{n-1}$  with  $y_0 = 1$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) and for

$0 < h < 1$ ,  $Nh = 1$ . Then

1.  $y_N \rightarrow e$  as  $N \rightarrow \infty$
2.  $y_N \rightarrow e^h$  as  $N \rightarrow \infty$
3.  $y_n = (1 + h)^n$
4.  $y_n \geq 1$

97. मानें कि  $y(x)$ , समाकल समीकरण

$$y(x) = x - \int_0^x x t^2 y(t) dt, \quad x > 0$$
 का हल है।

तो  $x = \sqrt{2}$  पर फलन  $y(x)$  का मान इस समान है:

1.  $\frac{1}{\sqrt{2}e}$
2.  $\frac{e}{2}$
3.  $\frac{\sqrt{2}}{e^2}$
4.  $\frac{\sqrt{2}}{e}$

97. Let  $y(x)$  be the solution of the integral equation

$$y(x) = x - \int_0^x x t^2 y(t) dt, \quad x > 0.$$

Then the value of the function  $y(x)$  at  $x = \sqrt{2}$  is equal to

1.  $\frac{1}{\sqrt{2}e}$
2.  $\frac{e}{2}$
3.  $\frac{\sqrt{2}}{e^2}$
4.  $\frac{\sqrt{2}}{e}$

98. समाकल समीकरण

$$y(x) = 1 + \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt, \quad \text{जहाँ}$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \cosh x \sinh t, & 0 \leq x \leq t \\ \cosh t \sinh x, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

के हल  $\lambda = -1$  तथा  $\lambda = 3$  के लिए हैं क्रमशः

1.  $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$  तथा  $\frac{1}{4} \left( \frac{3 \cos 2x}{\cos 2 - 2 \sin 2 \tanh 1} + 1 \right)$
2.  $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$  तथा  $\frac{1}{4} \left( \frac{3 \cosh 2x}{\cosh 2 - 2 \sinh 2 \tanh 1} + 1 \right)$
3.  $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$  तथा  $\frac{1}{4} \left( \frac{3 \cosh 2x}{\cosh 2 - 2 \sinh 2 \tanh 1} - 1 \right)$
4.  $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$  तथा  $\frac{1}{4} \left( \frac{3 \cos 2x}{\cos 2 - 2 \sin 2 \tanh 1} - 1 \right)$



101. मानें कि  $q_\alpha$  तथा  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) क्रमशः व्यापकीकृत निर्देशांक तथा व्यापकीकृत संवेग हैं। यदि  $H$  हैमिल्टनी को निर्दिष्ट करता है तथा  $q_{\alpha_0}$  (कुछ  $\alpha = \alpha_0$  के लिए) एक निरसनीय निर्देशांक है तो निम्न समीकरणों में से कौन-से समाधान पाते हैं?

1.  $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \forall \alpha$
2.  $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \forall \alpha$
3.  $\dot{p}_{\alpha_0} = 0, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha_0}}$
4.  $\dot{p}_{\alpha_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha_0}}, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = 0$

101. Let  $q_\alpha$  and  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) be the generalized coordinates and the generalized momenta, respectively. If  $H$  denotes the Hamiltonian and  $q_{\alpha_0}$  (for some  $\alpha = \alpha_0$ ) is an ignorable coordinate, then which of the following equations are satisfied?

1.  $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \forall \alpha$
2.  $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \forall \alpha$
3.  $\dot{p}_{\alpha_0} = 0, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha_0}}$
4.  $\dot{p}_{\alpha_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha_0}}, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = 0$

102. किसी संरक्षी तंत्र के लिए, अंतिम विन्यास स्थिरित हैं तथा परिवर्तनीय गतिशीलता में गति ऐसी है कि  $T + V = E$  है। यहां  $T, V$  तथा  $E$  क्रमशः निर्दिष्ट करते हैं गतिक ऊर्जा, विभव ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा को। यदि चर  $A$  में अत्याणु परिवर्तन को  $\delta(A)$  निर्दिष्ट करता है, तथा  $p_\alpha$  तथा  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) क्रमशः व्यापकीकृत संवेग तथा व्यापकीकृत निर्देशांकों को निर्दिष्ट करते हैं, तो

1.  $\delta \int T dt = 0$

2.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha dq_\alpha = 0$

3.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha dp_\alpha = 0$

4.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n (p_\alpha dq_\alpha + q_\alpha dp_\alpha) = 0$

102. For a conservative system, the end configurations are fixed and the velocity in the varied motion is such that  $T + V = E$ . Here  $T, V$  and  $E$  represent, respectively the kinetic energy, the potential energy and the total energy. If  $\delta(A)$  denotes the infinitesimal change in a variable  $A$ , and  $p_\alpha$  and  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) represent the generalized momenta and generalized coordinates, respectively, then

1.  $\delta \int T dt = 0$

2.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha dq_\alpha = 0$

3.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha dp_\alpha = 0$

4.  $\delta \int \sum_{\alpha=1}^n (p_\alpha dq_\alpha + q_\alpha dp_\alpha) = 0$

#### Unit-4

103. मानें कि  $c \in \mathbb{R}$  एक अचर है। मानें कि  $X, Y$  यादृच्छिक चर हैं, संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{यदि } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

के साथ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $c = \frac{1}{8}$
2.  $c = 8$
3.  $X$  तथा  $Y$  स्वतंत्र हैं।
4.  $P(X = Y) = 0$

103. Let  $c \in \mathbb{R}$  be a constant. Let  $X, Y$  be random variables with joint probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{if } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Which of the following statements are correct?

1.  $c = \frac{1}{8}$
2.  $c = 8$
3.  $X$  and  $Y$  are independent
4.  $P(X = Y) = 0$

104. मानें कि  $\{X_n, n \geq 1\}$  स्व.स.बं. एकसमान  $(-1, 2)$  यादृच्छिक चर हैं। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$  प्रायः निश्चिततः
2.  $\left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_{2i} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_{2i-1} \right\} \rightarrow 0$   
प्रायः निश्चिततः
3.  $\sup \{X_1, X_2, \dots\} = 2$  प्रायः निश्चिततः
4.  $\inf \{X_1, X_2, \dots\} = -1$  प्रायः निश्चिततः

104. Let  $\{X_n, n \geq 1\}$  be i.i.d. uniform  $(-1, 2)$  random variables. Which of the following statements are true?

1.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$  almost surely
2.  $\left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_{2i} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_{2i-1} \right\} \rightarrow 0$   
almost surely
3.  $\sup \{X_1, X_2, \dots\} = 2$  almost surely
4.  $\inf \{X_1, X_2, \dots\} = -1$  almost surely

105. मानें कि  $\{X_n\}$  एक मार्कोव शृंखला है  $\{0, 1, 2, \dots\}$  पर, और

$$P_{00} = \frac{2}{3}, P_{01} = \frac{1}{3}, P_{i,i+1} = \frac{2}{3}, P_{i,i-1} = \frac{1}{3}, \\ i \geq 1, P_{ij} = 0 \text{ अन्यथा।}$$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $\{X_n\}$  पुनरावर्ती है।
2.  $\{X_n\}$  क्षणिक है।
3.  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) > 0$
4.  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) > 0$

105. Let  $\{X_n\}$  be a Markov chain on  $\{0, 1, 2, \dots\}$  with

$$P_{00} = \frac{2}{3}, P_{01} = \frac{1}{3}, P_{i,i+1} = \frac{2}{3}, P_{i,i-1} = \frac{1}{3}, \\ i \geq 1, P_{ij} = 0 \text{ otherwise.}$$

Which of the following statements are correct?

1.  $\{X_n\}$  is recurrent
2.  $\{X_n\}$  is transient
3.  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) > 0$
4.  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) > 0$

106. निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. एक परिमित अवस्था मार्कोव शृंखला की कम-से-कम एक क्षणिक अवस्था है।
2. एक परिमित अवस्था मार्कोव शृंखला की कम-से-कम एक स्तब्ध बंटन है।
3. एक गणनीय अवस्था मार्कोव शृंखला के लिए हर अवस्था क्षणिक हो सकती है।
4. एक अनावर्ती गणनीय अवस्था मार्कोव शृंखला का कम-से-कम एक स्तब्ध बंटन है।

106. Which of the following statements are correct?

1. For a finite state Markov chain there is at least one transient state.
2. For a finite state Markov chain there is at least one stationary distribution.
3. For a countable state Markov chain, every state can be transient.
4. For an aperiodic countable state Markov chain there is at least one stationary distribution.

107. मानें कि  $X$  प्राचल  $\lambda > 0$  युक्त एक चरघातांकी बंटन का अनुसरण करता है।  $a > 0$  स्थित रखें। यादृच्छिक चर  $Y$  को परिभाषित करें कि  $Y = k$ , यदि  $ka \leq X < (k+1)a$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $P(4 < Y < 5) = 0$
2.  $Y$  एक चरघातांकी बंटन का अनुसरण करता है।
3.  $Y$  एक गुणोत्तर बंटन का अनुसरण करता है।
4.  $Y$  एक प्वासों बंटन का अनुसरण करता है।

107. Suppose  $X$  follows an exponential distribution with parameter  $\lambda > 0$ . Fix  $a > 0$ . Define the random variable  $Y$  by

$$Y = k, \text{ if } ka \leq X < (k+1)a,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Which of the following statements are correct?

1.  $P(4 < Y < 5) = 0$
2.  $Y$  follows an exponential distribution
3.  $Y$  follows a geometric distribution
4.  $Y$  follows a Poisson distribution

108. मानें कि  $\{X_1, \dots, X_n\}$  एक यादृच्छिक प्रदर्श है प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, -\infty < x < \infty \text{ जहां}$$

$\theta \in \mathbb{R}$  है, से निकाला हुआ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $\theta$  का उच्चतम संभावित आकलक  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  है।
2.  $\theta$  के लिए  $\sum_{i=1}^n X_i$  एक पर्याप्त प्रतिदर्श है।
3.  $\theta$  का उच्चतम संभावित आकलक पर्याप्त प्रतिदर्श का एक फलन है।
4. निम्न परीक्षण समस्या:  $H_0: \theta = 0$  बनाम  $H_1: \theta \neq 0$  के लिए एकसमानतः शक्तिम परीक्षण का अस्तित्व नहीं है।

108. Let  $\{X_1, \dots, X_n\}$  be a random sample from the probability density function

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, -\infty < x < \infty \text{ where } \theta \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements are correct?

1. The maximum likelihood estimator of  $\theta$  is  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
2.  $\sum_{i=1}^n X_i$  is a sufficient statistic for  $\theta$ .
3. The maximum likelihood estimator of  $\theta$  is a function of a sufficient statistic.
4. There does not exist a *uniformly most powerful* test for the following testing problem:  $H_0: \theta = 0$  vs  $H_1: \theta \neq 0$ .

109. परीक्षण समस्या  $H_0: \theta = 1$  बनाम  $H_1: \theta = \frac{1}{2}$ , जहां  $\theta$  एक प्वासों यादृच्छिक चर का माध्य है, पर विचारें। मानें कि  $X$  तथा  $Y$  प्वासों ( $\theta$ ) बंटन से निकाले गये एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। निम्न परीक्षण कार्यविधि पर विचारें।

यदि  $X = 0$  या  $(X = 1 \text{ तथा } X + Y \leq 2)$ ; है तो  $H_0$  को अस्वीकार करें; अन्यथा  $H_0$  को स्वीकार करें।

निम्न में से कौन-से सही हैं?

1.  $P[\text{प्रकार I त्रुटि}] = e^{-1} + 2e^{-2}$
2.  $P[\text{प्रकार II त्रुटि}] = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}$
3. परीक्षण का आमाप है  $e^{-1} + e^{-2}$
4. परीक्षण की शक्ति है  $\frac{3}{4}e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}$

109. Consider the problem of testing  $H_0: \theta = 1$  vs  $H_1: \theta = \frac{1}{2}$  where  $\theta$  is the mean of a Poisson random variable. Let  $X$  and  $Y$  be a random sample from Poisson ( $\theta$ ) distribution. Consider the following test procedure:

Reject  $H_0$  if either  $X = 0$  or  $(X = 1 \text{ and } X + Y \leq 2)$ ; otherwise accept  $H_0$ .

Which of the following are true?

1.  $P[\text{type I error}] = e^{-1} + 2e^{-2}$
2.  $P[\text{type II error}] = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}$
3. Size of the test is  $e^{-1} + e^{-2}$
4. Power of the test is  $\frac{3}{4}e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}$

110. मानें कि  $\{X_1, \dots, X_n\}$  एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है जो प्रायिकता घनत्व फलन  $f(x)$  युक्त एक बंटन से प्राप्त है। संभावित अनुपात परीक्षण (LRT) के उपयोग करते निम्न परीक्षण समस्या पर विचारें

$$H_0: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ बनाम}$$

$$H_1: f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. किसी भी LRT का अस्तित्व नहीं है।
2. अस्वीकारिता प्रांत  $|X_1|, \dots, |X_n|$  का एक फलन है।
3. अस्वीकारिता प्रांत  $X_1^2, \dots, X_n^2$  का एक फलन है।
4. अस्वीकारिता प्रांत इस रूप में हैं

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (|X_i| - 1)^2 \geq c \right\}$$

110. Suppose  $\{X_1, \dots, X_n\}$  is a random sample from the distribution with probability density function  $f(x)$ . Consider the following testing problem using likelihood ratio test (LRT).

$$H_0: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ vs}$$

$$H_1: f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Which of the following statements are correct?

1. There does not exist any LRT.
2. The rejection region is a function of  $|X_1|, \dots, |X_n|$ .
3. The rejection region is a function of  $X_1^2, \dots, X_n^2$ .
4. The rejection region is of the form  $\left\{ \sum_{i=1}^n (|X_i| - 1)^2 \geq c \right\}$ .

111. मानें कि  $X_1, X_2, \dots, X_7$  स्व.स.बं. यादृच्छिक चर हैं, जिनका आम संतत बंटन फलन  $F(x - \theta_1)$  है तथा  $Y_1, Y_2, \dots, Y_7$  स्व.स.बं. यादृच्छिक चर हैं

जिनका आम संतत बंटन फलन  $F(y - \theta_2)$  है। परीक्षण समस्या  $H_0: \theta_1 = \theta_2$  बनाम  $H_1: \theta_1 > \theta_2$  पर विचारें। मानें कि  $X_1, X_2, \dots, X_7, Y_1, Y_2, \dots, Y_7$  की कोटियां क्रमशः  $R_1, R_2, \dots, R_7, R_8, R_9, \dots, R_{14}$  हैं। परिभाषित करें कि

$$T_1 = \sum_{i=1}^7 R_i \text{ तथा } T_2 = \sum_{j=8}^{14} R_j$$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1.  $H_0$  के अधीन  $E(T_1) = E(T_2)$
2.  $H_0$  के अधीन  $E(T_1) = 52.5$
3.  $T_2$  27 हो नहीं सकता
4. यदि हम  $T_1$  के आधार पर दक्षिण-पृच्छ परीक्षण का उपयोग करेंगे तो प्रेक्षित मान  $T_1 = 77$ , सार्थकता स्तर 5% पर सार्थक है।

111. Let  $X_1, X_2, \dots, X_7$  be i.i.d. random variables with common continuous distribution function  $F(x - \theta_1)$  and let  $Y_1, Y_2, \dots, Y_7$  be i.i.d. random variables with common continuous distribution function  $F(y - \theta_2)$ . Consider the problem of testing

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 \text{ vs } H_1: \theta_1 > \theta_2.$$

Let  $R_1, R_2, \dots, R_7, R_8, R_9, \dots, R_{14}$  be the ranks of  $X_1, X_2, \dots, X_7, Y_1, Y_2, \dots, Y_7$ , respectively in the combined sample. Define

$$T_1 = \sum_{i=1}^7 R_i \text{ and } T_2 = \sum_{j=8}^{14} R_j.$$

Which of the following statements are true?

1.  $E(T_1) = E(T_2)$  under  $H_0$
2.  $E(T_1) = 52.5$  under  $H_0$
3.  $T_2$  cannot be 27
4. If we use right-tailed test based on  $T_1$ , then the observed value  $T_1 = 77$  is significant at 5% level of significance.

112. एक फुटबॉल लीग में घरेलू पक्ष से 380 मैचों में स्कोर किये गये गोलों का निम्न बारंबारिता बंटन है:

गोलों की संख्या	0	1	2	3	4	5
बारंबारिता	92	121	91	50	19	7

घरेलू पक्ष द्वारा स्कोर किये गये गोलों का माध्य 1.49 है। हम यह परीक्षण करना चाहते हैं कि  $H_0$ : गोलों का बंटन प्वासॉ है।

प्रेक्षणों के आधार पर समंजन सुष्ठुता के लिए  $\chi^2$ -प्रतिदर्शज का मान 1.27 है। इसके दिये जाने पर कि

$$\chi_{0.05,6}^2 = 1.64, \chi_{0.05,5}^2 = 1.15, \chi_{0.95,6}^2 = 12.59 \text{ and } \chi_{0.95,5}^2 = 11.07,$$

निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. सार्थकता स्तर 5% पर  $H_0$  अस्वीकार नहीं किया जाता।
2.  $\chi^2$ -प्रतिदर्शज की स्वतंत्रता कोटि 5 है।
3.  $H_0$  के अधीन प्वासॉ के गति-प्राचल का उच्चतम संभावित आकलक (MLE) 1.49 है।
4.  $H_0$  के अधीन, किसी गेम में घरेलू पक्ष अधिक से अधिक एक गोल स्कोर कर पायेगा, इसकी प्रायिकता का MLE  $2.49e^{-1.49}$  है।

112. In a football league, the goals scored by home teams over 380 matches have the following frequency distribution.

Number of goals	0	1	2	3	4	5
Frequency	92	121	91	50	19	7

The average goals scored by home teams is 1.49. We want to test

$H_0$ : Goal distribution is Poisson.

Based on observations the value of the  $\chi^2$ -statistic for goodness of fit is 1.27. Given  $\chi_{0.05,6}^2 = 1.64$ ,  $\chi_{0.05,5}^2 = 1.15$ ,  $\chi_{0.95,6}^2 = 12.59$  and  $\chi_{0.95,5}^2 = 11.07$ , which of the following are true?

1.  $H_0$  is not rejected at 5% level of significance.
2.  $\chi^2$ -statistic has 5 degrees of freedom

3. Under  $H_0$ , the maximum likelihood estimate (MLE) of the rate parameter of Poisson is 1.49
4. Under  $H_0$ , in a game, the MLE of the probability that home team will score at most one goal is  $2.49e^{-1.49}$

113. प्रतिमान  $Y = X\beta + \epsilon$  पर विचारें, जहां

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = ((x_{ij}))_{n \times p} \text{ तथा}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$$E(\epsilon) = 0 \text{ तथा } D(\epsilon) = \sigma^2 I_n, p < n.$$

मानें कि  $X^T X \beta = X^T Y$  का हल  $\hat{\beta}$  है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. यदि  $C^T \beta$  आकलनीय है, तो  $C^T \beta$  का श्रेष्ठतम रैखिक अनभिन्नत आकलक (BLUE)  $C^T \hat{\beta}$  है।
2. यदि तथा मात्र यदि  $\text{जाति}(X) > p$  है तो सभी रैखिक प्राचलीय फलन आकलनीय हैं।
3. यदि  $\text{जाति}(X) < p$  है तो कुछ रैखिक प्राचलीय फलन आकलनीय नहीं हैं।
4.  $\sigma^2$  का अनभिन्नत आकलक  $(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) / (n - p)$  है।

113. Consider the model  $Y = X\beta + \epsilon$ ,

$$\text{where } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = ((x_{ij}))_{n \times p} \text{ and}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}.$$

$$E(\epsilon) = 0 \text{ and } D(\epsilon) = \sigma^2 I_n, p < n.$$

Let  $\hat{\beta}$  be the solution of  $X^T X \beta = X^T Y$ . Which of the following are true?

1. If  $C^T \beta$  is estimable then  $C^T \hat{\beta}$  is the best linear unbiased estimator (BLUE) of  $C^T \beta$
  2. All linear parametric functions are estimable if and only if  $\text{Rank}(X) > p$ .
  3. If  $\text{Rank}(X) < p$  then some linear parametric functions are not estimable.
  4.  $(Y - X\hat{\beta})^T(Y - X\hat{\beta})/(n - p)$  is an unbiased estimator of  $\sigma^2$ .
114. मानें कि  $X_1$  तथा  $X_2$  स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जिनमें से प्रत्येक का  $N(\mu, \sigma^2)$  बंटन है, जहाँ  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$  है। मानें कि  $0 \leq \theta < 2\pi$  तथा  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ । मानें कि  $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)^t = AX, X = (X_1, X_2)^t$  के साथ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?
1.  $\underline{Y} = \underline{X}$  बंटन में, यदि तथा मात्र यदि  $\mu = 0$  है।
  2.  $\underline{Y} = \underline{X}$  बंटन में, यदि तथा मात्र यदि  $\mu = 0, \theta = 0$  हैं।
  3.  $Y_1$  तथा  $Y_2$  गाऊसियन हैं।
  4.  $Y_1$  तथा  $Y_2$  सहसंबंधित हो सकते हैं।
114. Let  $X_1$  and  $X_2$  be independent random variables each having  $N(\mu, \sigma^2)$  distribution, where  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ . Let  $0 \leq \theta < 2\pi$  and  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Put  $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)^t = AX$  with  $\underline{X} = (X_1, X_2)^t$ . Which of the following statements are correct?
1.  $\underline{Y} = \underline{X}$  in distribution if and only if  $\mu = 0$ .
  2.  $\underline{Y} = \underline{X}$  in distribution if and only if  $\mu = 0, \theta = 0$ .
  3.  $Y_1$  and  $Y_2$  are Gaussian.
  4.  $Y_1$  and  $Y_2$  may be correlated.
115. मानें कि  $X_1$  तथा  $X_2$  दो स्व.स.बं.  $N_p(0, \Sigma)$  यादृच्छिक चर हैं, जाति  $(\Sigma) = p$  के साथ। मानें कि  $A$  एक  $p \times p$  सममित आव्यूह है जाति  $r$  के साथ, तथा  $A^2 = A$  है। निम्न कथनों में कौन-से सही हैं?
1.  $X_1^T A X_1 \sim \chi_r^2$
  2.  $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim 2\chi_r^2$
  3.  $X_1^T A X_2 + X_2^T A X_1 \sim 2\chi_r^2$
  4.  $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim \chi_{2r}^2$
115. Let  $X_1$  and  $X_2$  be two i.i.d.  $N_p(0, \Sigma)$  random variables with  $\text{rank}(\Sigma) = p$ . Suppose  $A$  is a  $p \times p$  symmetric matrix of rank  $r$ , and  $A^2 = A$ . Which of the following statements are correct?
1.  $X_1^T A X_1 \sim \chi_r^2$
  2.  $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim 2\chi_r^2$
  3.  $X_1^T A X_2 + X_2^T A X_1 \sim 2\chi_r^2$
  4.  $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim \chi_{2r}^2$
116. आमाप  $N$  की एक परिमित समष्टि पर विचारें। साधारण प्रतिस्थापन सहित प्रतियचन प्रणाली (SRSWR) के अंतर्गत मानें कि आमाप  $n$  के प्रतिदर्श के आधार पर, प्रतिदर्श माध्य  $T_1$  है। स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श  $n$  के आधार पर, जहाँ प्रतिदर्श 4 स्तरों में प्रत्येक से SRSWR प्रणाली द्वारा अनुपाती नियतन के अंतर्गत निकाले जाते हैं, मानें कि प्रतिदर्श माध्य  $T_2$  है। तो प्रसरण( $T_1$ ) = प्रसरण( $T_2$ ) के समाधान हेतु निम्न में से उपयुक्त प्रतिबंध कौन-से हैं?
1. स्तर आमाप समान हैं।
  2. स्तर योगफल समान हैं।
  3. स्तर माध्य समान हैं।
  4. स्तर प्रसरण समान हैं।
116. Consider a finite population of size  $N$ . Let  $T_1$  be the sample mean based on a sample of size  $n$  under simple random sampling with replacement (SRSWR) scheme. Let  $T_2$  be the sample mean based on a stratified random sample of size  $n$  where the samples are drawn from each of 4 strata using SRSWR scheme under proportional allocation. Then which of the following are sufficient conditions for  $\text{Var}(T_1) = \text{Var}(T_2)$  to hold?
1. Strata sizes are same
  2. Strata totals are same
  3. Strata means are same
  4. Strata variances are same

117. प्राचल  $b, v, r, k, \lambda$  युक्त एक संतुलित अपूर्ण खंड अभिकल्पना (BIBD) पर विचारें, जहां  $v$  उपचारों के एक समुच्चय में से  $b$  खंडों में प्रत्येक के  $k$  उपचार हैं, अभिकल्पना में प्रत्येक उपचार  $r$  बार होता है, तथा उपचार की हर जोड़ी  $\lambda$  बार घटित होती है। प्रत्येक खंड में सभी उपचारों को उसके अपने पूरक समुच्चय से प्रतिस्थापित करके एक नयी अभिकल्पना बनायी जाती है। तो नयी अभिकल्पना के लिए निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. वह एक BIBD है।
2. प्रत्येक उपचार  $(b - r)$  बार होता है।
3. उपचार की प्रत्येक जोड़ी एक ही खंड में  $(b - r + \lambda)$  बार होता है।
4.  $bk = vr$

117. Consider a balanced incomplete block design (BIBD) with parameters  $b, v, r, k, \lambda$  where each of the  $b$  blocks contains  $k$  treatments out of a set of  $v$  treatments, each treatment occurs  $r$  times in the design and each pair of treatments occurs  $\lambda$  times. A new design is formed by replacing all the treatments in each block by its complementary set. Then which of the following are true for the new design?

1. It is a BIBD
2. Each treatment occurs  $(b - r)$  times
3. Each pair of treatments appears in the same block  $(b - r + \lambda)$  number of times
4.  $bk = vr$

118. मानें कि यादृच्छिक चर  $X$  निम्न प्रायिकता घनत्व फलन रखता है:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x - \mu)^{\alpha-1} e^{-(x-\mu)^\alpha}; & x > \mu \\ 0 & x \leq \mu, \end{cases}$$

जहां  $\alpha > 0, -\infty < \mu < \infty$  है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?  $X$  का जोखिम फलन

1. सभी  $\alpha > 0$  के लिए एक वर्धमान फलन है।
2. सभी  $\alpha > 0$  के लिए एक हासमान फलन है।
3. कुछ  $\alpha > 0$  के लिए एक वर्धमान फलन है।
4. कुछ  $\alpha > 0$  के लिए एक हासमान फलन है।

118. Suppose the random variable  $X$  has the following probability density function

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x - \mu)^{\alpha-1} e^{-(x-\mu)^\alpha}; & x > \mu \\ 0 & x \leq \mu, \end{cases}$$

where  $\alpha > 0, -\infty < \mu < \infty$ . Which of the following statements are correct? The hazard function of  $X$  is

1. an increasing function for all  $\alpha > 0$
2. a decreasing function for all  $\alpha > 0$
3. an increasing function for some  $\alpha > 0$
4. a decreasing function for some  $\alpha > 0$

119. इस समस्या पर विचारें:

$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4 \text{ को } y_1 + y_2 \leq 1,$$

$$y_2 + y_3 \leq 1, y_3 + y_4 \leq 1, y_4 + y_1 \leq 1$$

$$\text{तथा } y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

के अधीन अधिकतमीकृत करें। इष्टतम मान है

1. 8 के समान
2. 8 तथा 9 के बीच
3. 7 के समान या उससे अधिक
4. 7 के समान या उससे कम

119. Consider the problem:

$$\text{Maximize } 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4$$

subject to

$$y_1 + y_2 \leq 1, y_2 + y_3 \leq 1, y_3 + y_4 \leq 1,$$

$$y_4 + y_1 \leq 1 \text{ and } y_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, 3, 4.$$

Then the optimum value is

1. equal to 8
2. between 8 and 9
3. greater than or equal to 7
4. less than or equal to 7

120. मानें कि  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  की न्यूनिकरण समस्या का हल है, व्यवरोधों

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_2 + x_3 \geq 500$$

$$x_3 + x_4 \geq 400$$

$$x_4 + x_1 \geq 200$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  के अधीन।

किसी भी  $x_i$  के लिए निम्न में से कौन-से संभाव्य मान नहीं हैं?

1. 300

2. 400

3. 500

4. 600

120. Let  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  be an optimal solution to the problem of minimizing

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

subject to the constraints

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_2 + x_3 \geq 500$$

$$x_3 + x_4 \geq 400$$

$$x_4 + x_1 \geq 200$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Which of the following are **not** possible values for any  $x_i$ ?

1. 300

2. 400

3. 500

4. 600

FOR ROUGH WORK

# Latest Sarkari jobs, Govt Exam alerts, Results and Vacancies

- ▶ Latest News and Notification
- ▶ Exam Paper Analysis
- ▶ Topic-wise weightage
- ▶ Previous Year Papers with Answer Key
- ▶ Preparation Strategy & Subject-wise Books

To know more [Click Here](#)

