Prepp
Your Personal Exams Guide

2021

MATHEMATICS

गणित

Time : 3 hours] [Maximum Marks : 200

समय : 3 घंटे] [अधिकतम अंक : 200

Instructions **(निर्देश) :**

(i) This paper is divided into *two* Sections, Section—A and Section—B.

ये प्रश्नपत्र दो खंडों में विभाजित है, खंड—A और खंड—B ।

(ii) Each Section contains **eight** questions.

प्रत्येक खंड में **आठ** प्रश्न हैं।

(iii) A candidate has to attempt **twelve** questions.

एक परीक्षार्थी को **बारह** प्रश्नों का उत्तर लिखना है।

(iv) Question Nos. **1** and **9** are compulsory and out of the remaining, *any* **ten** are to be attempted choosing **five** from each Section.

प्रश्न संख्या **1** और **9** अनिवार्य हैं और शेष प्रश्नों में से किन्हीं **दस** का उत्तर लिखना है, प्रत्येक खंड से **पाँच–पाँच** प्रश्नों को हल करना है।

(v) Question Nos. **1** and **9** consist of *five* parts each. Each part will be of **6** marks. Word limit will be *150* (in relevant subjects only).

- प्रश्न संख्या **1** और **9** के पाँच–पाँच भाग हैं। प्रत्येक भाग के लिए **6** अंक निर्धारित हैं। शब्द संख्या *150* तक सीमित है (मात्र सम्बद्ध विषयों में)।

(vi) Remaining questions will be of **14** marks each.

शेष प्रश्न **14** अंकों के प्रति प्रश्न होंगे।

Prepp
Your Personal Exams Guide

SECTION—A

खंड—A

1. Answer the following questions : 6×5=30

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) Suppose the x and y-axes in the plane R^2 are rotated counterclockwise 45°, so that the new x' and y'-axes are along the line $y = x$ and the line $y = -x$ respectively. Find the change-of-basis matrix P and the coordinates of the point $A(5,6)$ under the given rotation.

मान लें कि R^2 समतल में x एवं y-अक्षों को वामवर्त रूप से 45° घुमाया जाता है ताकी नए x' और y'-अक्ष, $y = x$ और $y = -x$ के उपर क्रमशः पड़ते हैं। चेंज-ऑफ-बेसीस मैट्रीक्स P पता करें और दिए गए घूर्णन के अंतर्गत बिन्दु $A(5,6)$ के कोआर्डिनेट पता करें।

(b) Evaluate the limit

$$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$$

where $y \neq -4$ and $x \neq x^2$.

निम्नलिखित का मान निकालें :

$$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$$

जहाँ $y \neq -4$ एवं $x \neq x^2$ है।

(c) A force $F = 2i + j - 3k$ is applied to a spacecraft with velocity vector $v = 3i - j$. Express F as a sum of a vector parallel to v and a vector orthogonal to v.

एक अंतरिक्षयान, जिसका गति वेक्टर $v = 3i - j$ है, पर एक बल $F = 2i + j - 3k$ लगाया जाता है। F को v के समांतर एक वेक्टर और v के आयतीय एक वेक्टर के योगफल के रूप में व्यक्त करें।

(d) If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ पता करें।

Prepp
Your Personal Exams Guide

(e) An object moves along a straight line in such a way that after t seconds, its velocity is given by $v(t) = 10\log_5 t + 3\log_2 t$ ft/s. How long will it take for the velocity to reach 20 ft/s?

एक वस्तु एक सरल रेखा में इस तरह चलता है ताकी t सेकेंड बाद उसकी गति का मान $v(t) = 10\log_5 t + 3\log_2 t$ फुट/सेकेंड है। गति को 20 फुट/सेकेंड तक पहुचने में कितना समय लगेगा?

2. A Red Cross aircraft is dropping emergency food and medical supplies into a disaster area. If the aircraft releases the supplies immediately above the edge of an open field 700 ft long and if the cargo moves along the path $x = 120t$ and $y = -16t^2 + 500, t \geq 0$, does the cargo land in the field? The coordinates x and y are measured in feet and the parameter t (time since release) in seconds. Find a Cartesian equation for the path of the falling cargo and the cargo's rate of descent relative to its forward motion when it hits the ground. 14

एक रेडक्रॉस विमान एक आपदा क्षेत्र में आपातकालीन खाद्य सामाग्री और दवाओं की आपूर्ति गिरा रहा है। यदि ये विमान आपूर्तियों को 700 फीट लम्बे एक खुले मैदान के सिरे पर तुरंत गिरा देता है और सामान $x = 120t$ और $y = -16t^2 + 500, t \geq 0$, पथ पर चलता है, तो सामान मैदान में कहाँ पर गिरता है? x और y कोऑर्डिनिटों को फीट में मापा जाता है और मापदंड t (गिराने के बाद से समय) सेकेंड में मापा जाता है। गिरते हुए सामान के पथ के लिए एक कार्टेशियन समीकरण पता करें और अग्र गति के सापेक्ष में कार्गो के गिराव दर को, जब ये जमीन पर गिरता है, पता करें।

3. A particle moving with simple harmonic motion from an extremity of the path towards the centre is observed to be at distances x_1, x_2, x_3 from the centre at the end of three successive seconds. Show that the time of oscillation is $\frac{2\pi}{\theta}$, where $\cos\theta = \frac{x_1 + x_3}{2x_2}$. 14

एक पथ के सिरे से सरल आवर्त गति में बढ़ते हुए एक कण को तीन क्रमिक सेकेण्डों के अंतराल पर केन्द्र से x_1, x_2, x_3 की दूरियों पर देखा जाता है। यह दर्शायें कि दोलन का समय $\frac{2\pi}{\theta}$ है, जहाँ $\cos\theta = \frac{x_1 + x_3}{2x_2}$ है।

4. The linear operation $L(x)$ is defined by the cross-product $L(x) = b \times x$, where $b = [0\ 1\ 0]^T$ and $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ are three-dimensional vectors. The 3×3 matrix M of this operation satisfies $L(x) = M\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Find the eigenvalues of M. 14

एक रैखिक संचालन $L(x)$ को $L(x) = b \times x$ के अन्योन्य गुणन से परिभाषित किया जाता है, जहाँ $b = [0\ 1\ 0]^T$ और $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ तीन आयामी वेक्टर्स हैं। इस कार्य का 3×3 मैट्रीक्स M, $L(x) = M\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ को संतुष्ट करता है। M का आइजेन मान पता करें।

Prepp
Your Personal Exams Guide

5. Using Laplace transformation solve the following initial value problem : 14

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\sin t,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

लाप्लेस परिवर्तन को व्यवहार करते हुए निम्न आरंभिक मान समस्या को हल करें :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\sin t,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

6. Evaluate the integral $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$. 14

इंटिग्रल $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$ का मान निकालें।

7. Solve the differential equation given by

$$(x + 2y + 3)\, dx + (2x + 4y - 1)\, dy = 0$$ 14

निम्न डिफरेंशियल समीकरण को हल करें।

$$(x + 2y + 3)\, dx + (2x + 4y - 1)\, dy = 0$$

8. Show that $\oint \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$, over any piecewise smooth Jordan curve C enclosing the origin (0,0). 14

ऑरिजीन (0,0) को घेरनेवाले किसी पिसवाइज स्मूद जॉर्डन वक्र C के उपर यह दर्शाएँ कि

$$\oint \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

Prepp
Your Personal Exams Guide

SECTION—B

खंड—B

9. Answer the following questions : 6×5=30

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) Show that $\frac{G}{N}$ is isomorphic to the multiplicative group $W = \{1, -1\}$, where $G = D_{2n}$ is the dihedral group and $N = \{y, y^2, \ldots\ldots, y^{n-1}, y^n = e\}$.

यह दिखाएँ कि $\frac{G}{N}$, गुणक समूह $W = \{1, -1\}$ पर आइसोमॉर्फीक है, जहाँ $G = D_{2n}$ डाइहेड्रल समूह है और $N = \{y, y^2, \ldots\ldots, y^{n-1}, y^n = e\}$ है।

(b) Show that the sequence $< f_n >$, where $f_n(x) = nx(1-x)^n$ is not uniformly convergent on $[0,1]$.

यह दिखाएँ की सिक्वेंस $< f_n >$, जहाँ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $[0,1]$ पर समरूप से अभिसरित नहीं है।

(c) Solve the initial value problem :

$u' = -2tu^2, u(0) = 1$

with $h = 0{\cdot}2$ on the interval $[0, 0{\cdot}4]$. Use the fourth order classical Runge-Kutta method and compare with the exact solution.

निम्न आरंभिक मान समस्या को हल करें :

$u' = -2tu^2, u(0) = 1$

एवं अंतराल $[0, 0{\cdot}4]$ पर $h = 0{\cdot}2$ है। फोर्थ आर्डर क्लासिकल रूंज-कुट्टा पद्धति का व्यवहार करें और सटीक समाधान के साथ तुलना करें।

(d) State Cauchy integral formula and use it to calculate the following integral :

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos t} \cos(a \sin t)\, dt$$

कॉची इंटिग्रल फॉर्मूला को व्यक्त करें और उसके व्यवहार से निम्न इंटिग्रल को हल करें :

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos t} \cos(a \sin t)\, dt$$

(e) Let R be a commutative ring with unity and A be a proper ideal in R. Prove that the ideal A is a prime ideal if and only if R/A is an integral domain.

मान लें R, इकाई वाला एक कम्युटेटीव रिंग है और A, R में एक प्रॉपर आइडियल है। सिद्ध करें कि आइडियल A एक प्राइम आइडियल होगा यदि R/A एक इंटीग्रल डोमेन हो।

Prepp
Your Personal Exams Guide

10. *(a)* Integrate $f(x)=\frac{1}{x^3}$ over $[2, 3]$ by using the partition $P=\{2, 2a, 2a^2, 2a^3, \ldots, 2a^n=3\}$, where a is the nth-root of $\frac{3}{2}$. 7

पार्टीशन $P=\{2, 2a, 2a^2, 2a^3, \ldots, 2a^n=3\}$ का व्यवहार करते हुए $f(x)=\frac{1}{x^3}$ को $[2, 3]$ पर इंटिग्रेट करें, जहाँ a, $\frac{3}{2}$ का nवाँ मूल है।

(b) If $f(x)=x^3$ is defined on $[0, a]$, show that $f \in R[a, 0]$ and $\int_0^a f(x)\,dx=\frac{a^4}{4}$. 7

यदि $f(x)=x^3$, $[0, a]$ पर परिभाषित है, तो दिखाइये कि $f \in R[a, 0]$ और $\int_0^a f(x)\,dx=\frac{a^4}{4}$ है।

11. Define Euclidean domain and prove that for a, b be two non-zero elements of a Euclidean domain R, if b is not a unit in R, then

$$d(a) < d(ab)$$

Also show that an element x in a Euclidean domain is a unit if and only if $d(x)=d(1)$. 14

यूक्लीडियन डोमेन को परिभाषित करें और सिद्ध करें कि यदि a, b यूक्लीडियन डोमेन R के दो गैर-शून्य एलिमेंट्स हों और यदि b, R में एक इकाई न हो तो $d(a) < d(ab)$।
साथ ही दिखाएँ कि यदि $d(x)=d(1)$ है, तो यूक्लीडियन डोमेन में एक एलिमेंट x एक इकाई है।

12. Let $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ be $n+1$ distinct points from the closed interval $[a, b]$, and suppose that f is continuous on $[a, b]$ and has n continuous derivatives on the open interval (a, b), then there exists a $\xi \in (a, b)$ such that

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$ 14

मान लें कि एक (closed interval) बंद अंतराल $[a, b]$ में $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ तक $n+1$ पृथक बिन्दु हैं और $f, [a, b]$ पर कनटिन्यूअस डेरिवेटिव हैं, तथा खुले अंतराल $[a, b]$ में इसके n कन्टिन्यूअस डेरिवेटिव हैं, तो एक $\xi \in (a, b)$ मौजूद होगा ताकि $f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ हो।

Prepp
Your Personal Exams Guide

13. Find three different Laurent expansions involving powers of z for the function $f(z) = \frac{3}{2+z-z^2}$. Also show the residue of f having a pole of order k at $z_0 \neq \infty$ is

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z)) \qquad 14$$

फंक्शन $f(z) = \frac{3}{2+z-z^2}$ के लिए z के घातांकों वाले तीन लॉरेंट विस्तार निकालें। साथ ही यह दिखाएँ कि f का अवशेष, जिसका ऑर्डर k वाला पोल $z_0 \neq \infty$ है

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z))$$

14. A company has three plants at locations A, B and C, which supply to warehouses located at D, E, F, G and H. Monthly plant capacities are 800, 500 and 900 units respectively. Monthly warehouse requirements are 400, 400, 500, 400 and 800 units respectively. Unit transportation costs (in rupees) are given below :

	D	E	F	G	H
A	5	8	6	6	3
B	4	7	7	6	5
C	8	4	6	6	4

Determine an optimum distribution for the company in order to minimize the total transportation cost. 14

A, B और C स्थानों पर एक कंपनी के तीन संयंत्र हैं जो D, E, F, G और H स्थानों पर स्थित गोदामों को आपूर्ति करते हैं। मासिक संयंत्र क्षमताएँ क्रमशः 800, 500 और 900 इकाईयाँ हैं। मासिक गोदाम आवश्यकताएँ क्रमशः 400, 400, 500, 400 और 800 इकाईयाँ हैं। इकाई परिवहन व्यय नीचे दिए गए हैं:

	D	E	F	G	H
A	5	8	6	6	3
B	4	7	7	6	5
C	8	4	6	6	4

कुल परिवहन व्यय को न्यूनतम करने हेतु एक आदर्श वितरण व्यवस्था निर्धारित करें।

Prepp
Your Personal Exams Guide

15. (a) If S is the boundary of a spherical surface lying wholly within the fluid, then show that the mean value of the velocity potential is equal to its value at the centre of the sphere. 7

यदि S, एक द्रव में पूर्णतः डूबे हुए एक गोलकाकार आकृति की सीमा है, तो यह दिखाइये कि वेलोसिटी पोटेंशियल का मध्य मान गोलक के केन्द्र में इसके मान के बराबर है।

(b) A long pipe is of length l and has slowly tapering cross-section. It is inclined at angle α to the horizontal and water flows steadily through it from the upper to the lower end. The section at the upper end has twice the radius of the lower end. At the lower end, the water is delivered at atmospheric pressure. If the pressure at the upper end is twice atmospheric pressure, find the velocity of delivery. 7

l लंबाई वाले एक पाइप (नली) का क्रॉस-सेक्शन टेपरिंग है। यह क्षैतिज से कोण α पर झुका हुआ है और पानी इसमें से लगातार उपर से नीचे के छोर की ओर बह रहा है। उपरी छोर के अंश का अर्द्धव्यास, निचले छोर के अर्द्धव्यास का दोगुना है। निचले छोर पर पानी का निकास वायुमंडलीय दबाव पर होता है। यदि उपरी छोर पर दबाव वायुमंडलीय दबाव का दोगुना हो, तो निकास की गति पता करें।

16. Consider the following equation :

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0$$

Find a coordinate system $s = s(x, y), t = t(x, y)$ that transforms the equation into its canonical form. Show that in this coordinate system, the equation has the form $v_{st} = 0$, and find the general solution. 14

निम्न समीकरण पर विचार करें :

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0$$

एक कोऑर्डिनेट सिस्टम $s = s(x, y), t = t(x, y)$ निकालें जो उक्त समीकरण को कैनोनिकल रूप में बदल देता है। यह दिखाएँ कि इस कोऑर्डिनेट सिस्टम में समीकरण का रूप $v_{st} = 0$ होता है एवं इसका सामान्य समाधान निकालें।

★★★