

2022
Statistics
सांख्यिकी

Time: 3 hours
समय: 3 घंटे

Maximum Marks: 200
अधिकतम अंक: 200

Question paper specific instructions
प्रश्न पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

- i. This paper is divided into two Sections, Section-A and Section-B.
ये प्रश्नपत्र दो खंडों में विभाजित है, खंड. A और खंड. B
- ii. Each Section contains four (4) questions.
प्रत्येक खंड में चार प्रश्न है।
- iii. Candidate has to attempt five questions in all.
परीक्षार्थी को पांच प्रश्नों का उत्तर लिखना है।
- iv. Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** questions are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.
प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य है और शेष प्रश्नों में से किन्हीं तीन का उत्तर लिखना है, प्रत्येक खंड से एक प्रश्न को हल करना है।
- v. Word limit in questions, where specified, should be adhered to.
प्रश्नों में शब्द सीमा, जहाँ विनिर्दिष्ट है, का अनुसरण किया जाना चाहिए।
- vi. The number of marks carried by a question/part is indicated against it.
प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
- vii. Questions are printed in English & Hindi languages. In case of any ambiguity in translation of any question, English version shall be treated as final.
प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषाओं में छपा है। प्रश्नों के अनुवाद में किसी अस्पष्टता की स्थिति में, अंग्रेजी संस्करण को ही अन्तिम माना जाएगा।

SECTION A (खण्ड- A)

Q 1. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का संक्षिप्त उत्तर लिखिए

1(a). Let X_1, X_2 be a random sample of size 2 from $N(0,1)$. Obtain $P[X_1^2 + X_2^2 \geq 2]$. **(8)**

X_1, X_2 समष्टि $N(0,1)$ से आकार 2 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो $P[X_1^2 + X_2^2 \geq 2]$ का मान ज्ञात कीजिए।

1(b). A die was cast independently for 120 times and the following table shows the results
एक पासे को 120 बार स्वतंत्र रूप से उछालने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए। **(8)**

Spots up	1	2	3	4	5	6
शीर्ष पर संख्या						
Frequency	b	20	20	20	20	40-b
बारंबारता						

The hypothesis H_0 : die is unbiased; is tested and rejected at the level of significance 0.025.
Find the value of b.

यदि 0.025 के सार्थकता स्तर पर H_0 परिकल्पना : पांसा अनभिन्न है, को अस्वीकार किया गया है,
तो b का मान ज्ञात कीजिए।

1(c). Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample of size n from the distribution having p.d.f. **(8)**

X_1, X_2, \dots, X_n निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाली समष्टि से आकार n का यादृच्छिक प्रतिदर्श है:

$$f(x|\theta) = c \left(e^{-\frac{(x-2\theta)^2}{2}} + e^{-\frac{(x-4\theta)^2}{2}} \right); -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$$

Find an unbiased estimator of θ .

तो θ का अनभिन्न आंकलक ज्ञात कीजिए।

1(d). Consider three independent random variables, Y_1, Y_2 and Y_3 , having common variance σ^2 and expectations $E(Y_1) = E(Y_3) = \mu_1 + \mu_3$ and $E(Y_2) = \mu_1 + \mu_2$. Determine the condition of estimability of the parametric function $I'\mu = l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + l_3\mu_3$. Obtain the expression for the normal equations.

तीन स्वतंत्र यादृच्छिक चर, Y_1, Y_2 और Y_3 पर विचार करें, जिनका एक समान प्रसरण σ^2 और प्रत्याशा $E(Y_1) = E(Y_3) = \mu_1 + \mu_3$ और $E(Y_2) = \mu_1 + \mu_2$ है। पैरामीट्रिक फंक्शन $I'\mu = l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + l_3\mu_3$ की आंकलनीय होने की शर्त निर्धारित करें। प्रसामान्य समीकरणों के लिए व्यंजक भी प्राप्त करें। **(8)**

- 1(e).** The following table gives the yield (kg per plot) of three varieties A, B and C of wheat, obtained with four different kinds of fertilizers F_1, F_2, F_3 and F_4 . **(8)**

निम्न तालिका चार अलग प्रकार के उर्वरकों F_1, F_2, F_3 और F_4 के साथ प्राप्त गेहूं की तीन किस्मों A, B और C की उपज किलो प्रति प्लॉट दर्शाती है।

Fertilizer (उर्वरक)	Wheat Variety (गेहूं की किस्म)		
	A	B	C
F_1	8	3	7
F_2	10	4	8
F_3	6	5	6
F_4	8	4	7

For testing the null hypothesis of equality in the average yields of the three varieties of wheat and four fertilizers are equally effective, construct the ANOVA table. Also, provide the inference about the resultant table.

गेहूं की तीन किस्मों की औसत उपज में समानता और चार उर्वरक समान रूप से प्रभावी हैं की शून्य परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए, ANOVA तालिका का निर्माण करें। परिणामी तालिका के बारे में निष्कर्ष भी दें।

- Q 2.** Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

- 2(a).** Let X_1, X_2, X_3 be a random sample of size 3 from the distribution having p.d.f. **(10)**

X_1, X_2, X_3 निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाली समष्टि से आकार 3 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Obtain the moment generating function of $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Also, find the variance of Y.

तो $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ का आघूर्ण जनक फलन प्राप्त कीजिए। Y का प्रसरण भी निकालिए।

- 2(b).** Let $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ be the order statistic corresponding to a random sample of size 4 from a distribution with p.d.f. (15)

$Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाली समष्टि से आकार 4 के यादृच्छिक प्रतिदर्श के संगत क्रमित प्रतिदर्शज है:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{if } 0 < x < \theta, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The hypothesis $H_0: \theta=1$ is rejected against $H_1: \theta \neq 1$ if $y_4 \leq 0.5$ or ≥ 1 (y_4 being the observed value of Y_4). Let $K(\theta)$, $\theta > 0$ be the power function of the test. Obtain the value of $\{K(1.5)/K(0.5)\}$.

परिकल्पना $H_0: \theta=1$ को परिकल्पना $H_1: \theta \neq 1$ के विरुद्ध अस्वीकार किया जाता है यदि $y_4 \leq 0.5$ या ≥ 1 है। Y_4 का प्रेक्षित मान y_4 है। माना $K(\theta)$, $\theta > 0$ इस परीक्षण का शक्ति फलन, है तो $\{K(1.5)/K(0.5)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- 2(c).** Define ancillary statistic along with its uses. Let X_1, X_2 be a random sample of size 2 from a distribution with p.d.f. as under (15)

सहायक प्रतिदर्शज को इसके उपयोग सहित परिभाषित कीजिए। माना X_1, X_2 निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाली समष्टि से आकार 2 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} e^{-x^\theta} & \text{if } x > 0, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Show that $T = \left(\frac{\log_e x_1}{\log_e x_2}\right)$ is an ancillary statistic.

दिखाइए कि $T = \left(\frac{\log_e x_1}{\log_e x_2}\right)$ एक सहायक प्रतिदर्शज है।

- Q 3.** Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

- 3(a).** Let -1 and 1 be two random observations from $N(\theta, \theta)$, $\theta \neq 0$. Obtain the maximum likelihood estimate of θ . (10)

माना -1 और 1, $N(\theta, \theta)$, $\theta \neq 0$ से लिए गए यादृच्छिक प्रेक्षण हैं। तो θ का अधिकतम संभाव्य आंकलक ज्ञात कीजिए।

- 3(b).** Define Wishart (W_p) distribution along with its important uses and properties.

If two Wishart distributions $M_1 \sim W_p(\Sigma, n_1)$ and $M_2 \sim W_p(\Sigma, n_2)$ are independent then,

show that $M_1 + M_2 \sim W_p(\Sigma, n_1 + n_2)$. (15)

विशार्ट (W_p) बंटन को परिभाषित करें। यदि दो विशार्ट बंटन $M_1 \sim W_p(\Sigma, n_1)$ और $M_2 \sim W_p(\Sigma, n_2)$ स्वतंत्र हैं,

तो दर्शाएँ कि $M_1 + M_2 \sim W_p(\Sigma, n_1 + n_2)$ ।

- 3(c).** Differentiate between cluster and stratified random sampling. Prove that in cluster sampling with equal cluster size M , the relative efficiency with respect to SRSWOR in terms of intraclass correlation coefficient ρ is given by $RE = [1 + (M - 1)\rho]^{-1}$. What is that value(s) of ρ for which cluster sampling is more efficient than SRSWOR? **(3+10+2=15)**

गुच्छ और स्तरीकृत यादृच्छिक नमूनाकरण के बीच अंतर करें। सिद्ध करें कि समान गुच्छ आकार M वाले गुच्छ नमूनाकरण और, अंतराकक्षीय सहसंबंध गुणांक ρ के संदर्भ में SRSWOR, के बीच सापेक्ष दक्षता $RE = [1 + (M - 1)\rho]^{-1}$ है। ρ का वह मान क्या है जिसके लिए गुच्छ नमूनाकरण, SRSWOR से अधिक कुशल है?

- Q 4.** Write answers of the following questions

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

- 4(a).** Show that the expression of sample size n for SRSWOR is given by **(10)**

SRSWOR के लिए नमूना आकार n की निम्नलिखित अभिव्यक्ति दर्शाएँ

$$n = \left\{ \frac{1}{N} + \left(\frac{E}{ts} \right)^2 \right\}^{-1},$$

where, $E = t \times SE(\bar{y})$, t = value of t statistic, s = estimate of S and N = population size.

जहाँ, t = t प्रतिदर्शज का मान, s = s का आंकलित मान और N = समष्टि का आकार है।

- 4(b).** Explain the concept of main effect and interactions with the help of 2^2 factorial experiments. Also explain the concept of balanced confounding in factorial experiments. **(6+9=15)**

2^2 भाज्यिक प्रयोगों की सहायता से मुख्य प्रभाव और अंतःक्रिया प्रभाव की अवधारणा को स्पष्ट करें। भाज्यिक प्रयोगों में संतुलित संभ्रम की अवधारणा को भी समझाइए।

- 4(c).** A Common aim across several multivariate analysis methods is dimension reduction. **(5+5+5=15)** State the unique aim for each of the following analytical technique

कई बहुचरीय विश्लेषण पद्धतियों में एक सामान्य उद्देश्य आयाम में कमी करना है। निम्नलिखित विश्लेषणात्मक तकनीकों में से प्रत्येक के लिए अद्वितीय उद्देश्य बताएं।

- Principal Component Analysis/ प्रमुख घटक विश्लेषण
- Factor Analysis/ कारक विश्लेषण
- Canonical Analysis/ विहित विश्लेषण

SECTION B (खण्ड- B)

Q 5. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का संक्षिप्त उत्तर लिखिए

5(a). Let the demand of a certain item during a day be defined by the distribution as under:

किसी वस्तु की मांग का प्रायिकता घनत्व फलन निम्नवत है:

(2+3+3=8)

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 0.1 & \text{if } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{if } x > 10 \end{cases}$$

The demand is assumed to occur with a uniform pattern during the whole day. Let the unit carrying cost of the item in inventory be ₹ 0.5 per day and unit shortage cost be ₹ 4.5 per day. If ₹ 0.5 be the purchasing cost per unit, determine the optimum level of the inventory.

माना कि दिन भर मांग एकसमान रहती है। भण्डार में एक वस्तु को रखने की कीमत ₹ 0.5 प्रतिदिन है और अभाव मूल्य ₹ 4.5 प्रतिदिन है। यदि प्रति वस्तु क्रय मूल्य ₹ 0.5 हो तो भण्डारण हेतु वांछित स्तर ज्ञात कीजिए।

5(b). Consider the following transition probability matrix of a Markov chain having three states 1, 2 and 3:

(8)

तीन अवस्थाओं 1, 2 और 3 वाली मार्कोव श्रृंखला का संक्रमण प्रायिकता आव्यूह निम्नवत है:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & p_1 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & p_2 \end{pmatrix}$$

Obtain the values of (i) p_1 and p_2 , (ii) $p_{11}^{(3)}$, and (iii) $p_{12}^{(3)}$.

(i) p_1 व p_2 , (ii) $p_{11}^{(3)}$, और (iii) $p_{12}^{(3)}$ के मान ज्ञात कीजिए |

5(c). What is exponential lifetime model? Discuss the statements of its important characterization properties.

(8)

चरघातांकी जीवनकाल प्रतिमान क्या होता है? इसकी प्रमुख लाक्षणिक विशेषताओं के कथनों की चर्चा कीजिए |

5(d). Describe the (a) Graphical method (b) method of semi average (c) method of least squares (d) method of moving averages for measuring the trend component in a time series. State the merits and demerits of the method of least squares for trend measurement.

(8)

प्रवृत्ति मापन के लिए (a) आलेख विधि (b) अर्द्ध माध्य विधि (c) न्यूनतम वर्ग विधि व (d) चर माध्य विधि का वर्णन करें। प्रवृत्ति मापन के लिए न्यूनतम वर्ग विधि के गुण और दोष बताएं।

- 5(e).** Calculate the Crude and Standardized death rates for the following data:
निम्नलिखित आंकड़ों के लिए अशोधित और मानकीकृत मृत्यु दर की गणना करें:

(8)

Age group आयु वर्ग	Population(in '000) जनसँख्या ('000 में)	Number of deaths मृतकों की संख्या	Standard age distributions per 1000 मानकीकृत आयु बंटन प्रति 1000
0-9	24	400	220
10-24	35	110	300
25-44	37	225	290
45-64	20	350	150
≥65	5	410	50

- Q 6.** Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

- 6(a).** Clearly differentiate between truncation and censoring. Also, obtain the likelihood equations in case of type 1 censoring. (5+5=10)

रुंडन एवं अवरोधन के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए | प्रकार 1 के अवरोधन हेतु संभाव्यता समीकरण भी प्राप्त कीजिए |

- 6(b).** Control chart for \bar{x} and R are maintained for an important quality characteristic with sample size $n=5$. \bar{x} and R are computed for each sample. Results obtained after 25 samples are $\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = 37.6400$ and $\sum_{i=1}^{25} R_i = 8.1302$. (7.5+7.5=15)

एक विशिष्ट गुणता अभिलक्षण हेतु आकार 5 के प्रतिदर्शों पर आधारित \bar{x} व R संचित्र अनुरक्षित किये गए हैं | प्रत्येक प्रतिदर्श हेतु \bar{x} व R का अभिकलन किया गया है | 25 प्रतिदर्शों के उपरान्त निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए: $\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = 37.6400$ और $\sum_{i=1}^{25} R_i = 8.1302$

- (i) Compute the central line and control limits for \bar{x} and R charts.

\bar{x} व R संचित्रों हेतु केन्द्रीय रेखा और नियंत्रण सीमाओं की गणना कीजिए |

- (ii) Assuming both charts exhibit control, estimate the process mean and standard deviation.

यह मानते हुए कि दोनों संचित्र नियंत्रण को दर्शाते हैं, प्रक्रम माध्य एवं मानक विचलन का प्राक्कलन कीजिए |

(Given/दिया है: $D_3=0$, $D_4=2.114$, $A_2=0.577$, $d_2=2.3261$)

6(c). Using (i) graphical method, and (ii) M-technique, solve the following LPP

(i) चित्र विधि और (ii) M – विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सरल कीजिए:

(7.5+7.5=15)

Minimize $z=12x+20y$; subject to $3x+4y \geq 50$, $7x+12y \geq 120$ and $x, y \geq 0$

न्यूनतम $z=12x+20y$; जबकि $3x+4y \geq 50$, $7x+12y \geq 120$ तथा $x, y \geq 0$

Q 7. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

7(a). Give the physical interpretation of a saddle point. Find the range of values for p and q that will render the cell (2,2) as a saddle point in the game with the following pay-off matrix:

पल्याण बिंदु की भौतिक व्याख्या कीजिए | निम्नलिखित भुगतान आव्यूह वाले खेल में p व q के मानों के परिसर इस प्रकार प्राप्त कीजिए की कक्षक (2,2) एक पल्याण बिंदु बन जाए :

(5+5=10)

	Player B/ खिलाड़ी B		
Player A /खिलाड़ी A	1	q	6
	p	5	10
	6	2	3

7(b). Describe the present official statistical system in India relating to population and agriculture.

Mention the name of various official agencies and their important publications responsible for data collection on agriculture and forestry sector.

(10+5=15)

भारत में जनसंख्या एवं कृषि से संबंधित वर्तमान आधिकारिक सांख्यिकीय प्रणाली का वर्णन करें। कृषि और वानिकी क्षेत्र पर डेटा संग्रह के लिए जिम्मेदार विभिन्न आधिकारिक एजेंसियों और उनके महत्वपूर्ण प्रकाशनों के नाम का उल्लेख करें।

7(c). Discuss the conditions under which factor analysis should be used in psychometry.

Also, give a few misuses of it.

(10+5=15)

उन शर्तों की चर्चा कीजिए जब कारक विश्लेषण का प्रयोग मनोमिति में किया जाना चाहिए | इसके कुछ दुरुपयोगों की भी चर्चा कीजिए |

Q 8. Write answers of the following questions.
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

8(a). If the ratio between Laspeyre's and Paasche's index numbers is 28:27, find the missing number in the following table: (10)

यदि लास्पेयर और पाशे के सूचकांक संख्याओं के बीच का अनुपात 27:28 है, तो निम्नलिखित तालिका में लुप्त संख्या x ज्ञात कीजिए:

Commodity/ वस्तु	Base year/ आधार वर्ष		Current year/ चालू वर्ष	
	Price/ मूल्य	Quantity/ मात्रा	Price/ मूल्य	Quantity/ मात्रा
A	1	10	2	5
B	1	5	x	2

8(b). Discuss the advantages and applications of the life table. Describe various columns of the complete life table with their interpretations.

जीवन तालिका के लाभों और अनुप्रयोगों पर चर्चा करें। संपूर्ण जीवन तालिका के विभिन्न स्तंभों का उनकी व्याख्याओं सहित वर्णन करें।

(5+10=15)

8(c). What are the various methods of calculating reliability in psychometry
Discuss any one of them in detail.

(5+10=15)

मनोमिति में विश्वसनीयता की गणना के विविध रीतियां क्या हैं? किसी एक का विस्तार से वर्णन कीजिए।