www.prepp.in
Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) माना कोटि pq का एक समूह G है, जहाँ p और q अभाज्य हैं। दर्शाइए कि या तो G एक आबेली समूह है या कोई भी अतत्समक (नॉन-आइडेन्टिटी) अवयव, G के प्रत्येक अवयव से क्रमविनिमेय नहीं करता।

Let G be a group of order pq, where p and q are primes. Show that either G is an abelian group or no non-identity element commutes with every element of G. *10*

(b) दर्शाइए कि यूक्लिडीय प्रांत में प्रत्येक शून्येतर अभाज्य गुणजावली उच्चिष्ठ है।

Show that every non-zero prime ideal in a Euclidean Domain is maximal. *10*

(c) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\sin\dfrac{\pi}{x}\right)^n - 1}{\left(1+\sin\dfrac{\pi}{x}\right)^n + 1}$, $x \in (0, 1)$ द्वारा परिभाषित फलन $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ के असांतत्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

Find the points of discontinuity of the function $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{x}\right)^n - 1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{x}\right)^n + 1}, \; x \in (0, 1).$$ *10*

(d) दर्शाइए कि फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूल-बिंदु पर विश्लेषिक नहीं है, जबकि इस बिंदु पर कौशी-रीमान समीकरण संतुष्ट होते हैं।

Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at the origin, although Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point. *10*

Prepp
Your Personal Exams Guide

(e) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैत समस्या को ग्राफीय विधि से हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $Y = 10y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_4$

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 - y_3 - 2y_4 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Solve the dual problem of the following linear programming problem by the graphical method :

Minimize $Y = 10y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_4$

subject to the constraints :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 - y_3 - 2y_4 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

10

Q2. (a) माना कोटि 2 के दो अवयवों u और v से जनित एक परिमित समूह G है। दर्शाइए कि G, 2n कोटि के द्वितल समूह के तुल्याकारी है, जहाँ O(uv) = n है।

Let G be a finite group generated by two elements u and v of order 2 each. Show that G is isomorphic to the dihedral group of order 2n, where O(uv) = n.

15

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रतिवर्तन सूत्र $u_{n+1} = \sqrt{7+u_n}$, $u_1 = \sqrt{7}$, द्वारा परिभाषित अनुक्रम (u_n), समीकरण $x^2 - x - 7 = 0$ के धनात्मक मूल पर अभिसरित होता है।

Prove that the sequence (u_n) defined by the recursion formula $u_{n+1} = \sqrt{7+u_n}$, $u_1 = \sqrt{7}$, converges to the positive root of $x^2 - x - 7 = 0$.

15

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(c) कन्टूर समाकलन विधि के उपयोग से सिद्ध कीजिए कि यदि $a > b > 0$ है,

तो $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\left\{a - \sqrt{a^2 - b^2}\right\}$$ है।

Use the method of contour integration to prove

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\left\{a - \sqrt{a^2 - b^2}\right\}, \text{ if } a > b > 0.$$ 20

Q3. (a) सिद्ध कीजिए कि

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$ है,

जहाँ $n = 0, 1, 2, \ldots$ के लिए $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(2\cos\theta)\, d\theta$ है।

Prove that

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

where

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(2\cos\theta)\, d\theta, \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots .$$ 15

(b) अंतराल [0, 1] पर एक फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ x^3, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है।

निम्न समाकल $\underline{\int_0^1} f$ और उच्च समाकल $\overline{\int_0^1} f$ का मूल्यांकन कीजिए। क्या समाकल $\int_0^1 f$ का अस्तित्व है ?

A function f is defined on [0, 1] by

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{when } x \text{ is rational} \\ x^3, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Evaluate lower integral $\underline{\int_0^1} f$ and upper integral $\overline{\int_0^1} f$. Does the integral $\int_0^1 f$ exist ? 20

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(c) निम्नलिखित सारणी कार्यों को मशीनें नियत करने पर अनुमानित लागत निरूपित करती है। कुल लागत को न्यूनतम करने के लिए इस नियतन समस्या को हल कीजिए।

मशीन

कार्य		M_1	M_2	M_3	M_4
	J_1	8	24	28	32
	J_2	8	13	17	19
	J_3	8	15	19	22

क्या कुल न्यूनतम लागत के लिए नियतन अद्वितीय है ? अपने उत्तर का तर्क दीजिए और एक वैकल्पिक (alternate) नियतन, यदि इसका अस्तित्व है, प्राप्त कीजिए।

The following table represents the estimated costs of assigning jobs to machines. Solve this assignment problem to minimize the total cost.

Machine

Job		M_1	M_2	M_3	M_4
	J_1	8	24	28	32
	J_2	8	13	17	19
	J_3	8	15	19	22

Is the assignment unique for the total minimum cost ? Justify your answer and obtain an alternate assignment, if it exists. *15*

Q4. (a) माना n एक धनात्मक पूर्णांक है। दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन तुल्य हैं :

(i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ एक पूर्णांकीय प्रांत है।

(ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ एक क्षेत्र है।

(iii) n अभाज्य है।

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

Let n be a positive integer. Show that the following statements are equivalent :

(i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is an integral domain.

(ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is a field.

(iii) n is prime. *15*

(b) सिद्ध कीजिए कि अनंत समाकल $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2 \sin^2 x} dx$ अपसारी है।

Prove that the improper integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2 \sin^2 x} dx$ is divergent. *15*

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा विधि से हल कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 4x_1 + 10x_2$

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

व्याख्या सहित, एक वैकल्पिक (alternate) इष्टतम हल, यदि इसका अस्तित्व है, प्राप्त कीजिए।

Solve the following linear programming problem by the Simplex method :

Maximize $Z = 4x_1 + 10x_2$

subject to the constraints

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Obtain an alternate optimal solution, if it exists, with explanation. *20*

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) समीकरणों $\frac{dx}{xz - y} = \frac{dy}{yz - x} = \frac{dz}{1 - z^2}$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

Find the integral surface of the equations $\frac{dx}{xz - y} = \frac{dy}{yz - x} = \frac{dz}{1 - z^2}$. *10*

(b) न्यूटन-रैफ्सन पुनरावृत्ति सूत्र के उपयोग से, N का घनमूल ज्ञात करने के लिए सूत्र

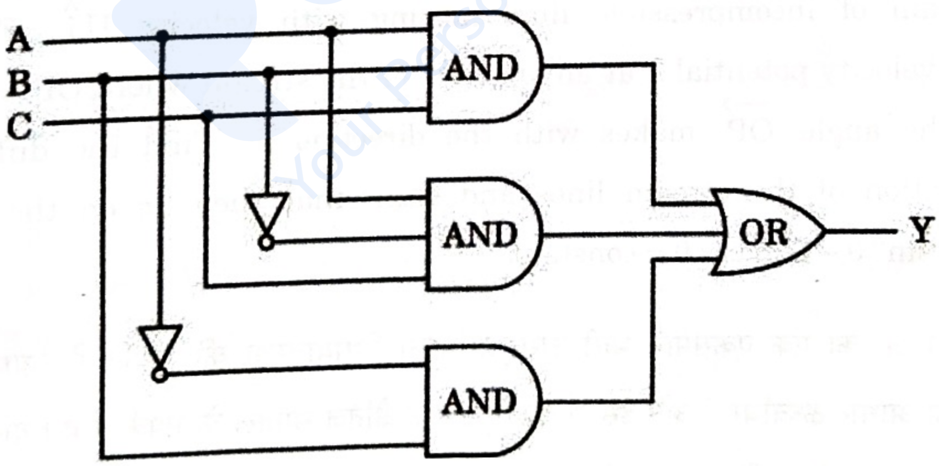
$x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2x_i + \frac{N}{x_i^2}\right)$ को प्रमाणित कीजिए।

प्रमाणित होने पर, इस सूत्र के उपयोग से, प्रारंभिक सन्निकटन 3·9 लेकर, 63 का घनमूल दशमलव के चार स्थानों तक सही ज्ञात कीजिए।

By using the Newton-Raphson iterative formula, establish the formula $x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2x_i + \frac{N}{x_i^2}\right)$ to find the cube root of N.

Use this formula, if established, to find the cube root of 63 correct to four decimal places with the initial approximation 3·9. *10*

(c) निम्न तर्क परिपथ L का विचार कीजिए :

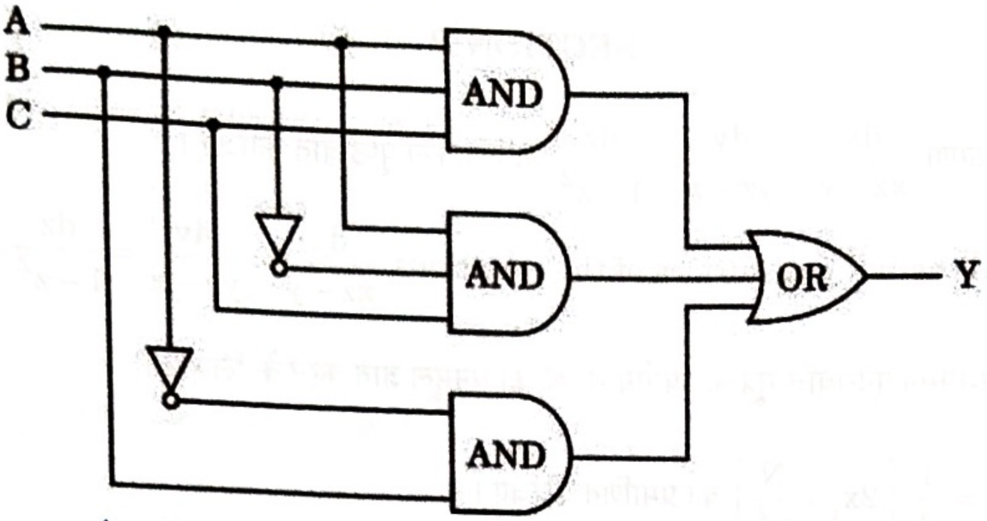


(i) Y को बूलीय व्यंजक के रूप में अभिव्यक्त कीजिए।

(ii) A, B और C के लिए 8-बिट विशिष्ट अनुक्रम लिखिए।

(iii) 8-बिट विशिष्ट अनुक्रमों के उपयोग से L की सत्यमान सारणी ज्ञात कीजिए।

Consider the logic circuit L :



(i) Express Y as a Boolean expression.

(ii) Write 8-bit special sequences for A, B and C.

(iii) Find the truth table of L using 8-bit special sequences. *10*

(d) असंपीड्य तरल का वेग $U\hat{i}$ की एक एकसमान धारा में मूल-बिंदु O पर एक m प्रबलता का सरल स्रोत स्थित है। धारा के किसी बिंदु P पर वेग विभव ϕ ज्ञात कीजिए, जहाँ OP = r और θ वह कोण है जो $\overrightarrow{OP}$, $\hat{i}$ की दिशा से बनाता है। धारा रेखाओं के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि वे पृष्ठ $Ur^2 \sin^2 \theta - 2m \cos \theta =$ अचर पर स्थित है।

A simple source of strength m is fixed at the origin O in a uniform stream of incompressible fluid moving with velocity $U\hat{i}$. Find out the velocity potential ϕ at any point P of the stream where OP = r and θ is the angle $\overrightarrow{OP}$ makes with the direction $\hat{i}$. Find the differential equation of the stream lines and show that they lie on the surface $Ur^2 \sin^2 \theta - 2m \cos \theta = \text{constant}$. *10*

(e) त्रिज्या 'a' का एक एकसमान भारी ठोस अर्धगोला विरामावस्था की स्थिति में रखा है जबकि इसका आधार ऊर्ध्वाधर है और इसका वक्र पृष्ठ एक क्षैतिज समतल के संपर्क में है। यदि अर्धगोले को मुक्त (रिलीज़) किया जाता है, जब समतल इतना रूक्ष है कि फिसलन को रोक सके, तो दर्शाइए कि t समय पर कोण θ, जो अर्धगोले का आधार क्षैतिज से बनाता है, इस प्रकार है कि

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{15 g \cos \theta}{a(28 - 15 \cos \theta)} \text{ है।}$$

www.prepp.in

A uniform heavy solid hemisphere of radius 'a' is held at rest with its base vertical and its curved surface in contact with a horizontal plane. If the hemisphere is released when the plane is rough enough to prevent slipping, show that the angle θ that the base makes with the horizontal at time t, is such that $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{15\,g\cos\theta}{a\,(28 - 15\cos\theta)}$. 10

Q6. (a) आंशिक अवकल समीकरण $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को विहित रूप में समानीत कीजिए और तब इसे हल कीजिए।

Reduce the partial differential equation $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ to canonical form and hence solve it. 20

(b) (i) निम्नलिखित चल (फ्लोटिंग) बिंदु 10-द्वयंक (बिट) संख्याओं के दशमलव तुल्यांक ज्ञात कीजिए, जिनमें 5 द्वयंक भिन्न भाग हों :

1010111011 और 0100101010

Find the decimal equivalent of the following floating point 10-bit numbers with 5 bits as fractional part :

1010111011 and 0100101010 8

(ii) $(11001.1011)_{10} + (33.24)_8 + (101101)_2$ का मूल्यांकन कीजिए और अंतिम परिणाम को षोडश आधारी (हैक्साडेसिमल) पद्धति में बदलिए।

Evaluate $(11001.1011)_{10} + (33.24)_8 + (101101)_2$ and convert the final result in hexadecimal system. 7

(c) माना त्रिज्या 'a' के एक अनंत लंबे बेलन को वेग $-V\hat{i}$ की एक एकसमान धारा में रखा गया है। मिल्ने-थॉमसन के वृत्त प्रमेय के उपयोग से इसका सम्मिश्र वेग विभव क्या होगा ? इसके अतिरिक्त, यदि बेलन के परितः k का एक परिसंचरण उत्पन्न किया जाता है, तो प्रगतिरोध बिंदु ज्ञात कीजिए। क्या वे ऊर्ध्वाधर दिशा में उत्थापन प्रवृत्ति उत्पन्न करते हैं ? व्याख्या कीजिए कि कैसे।

Suppose that there is an infinitely long cylinder of radius 'a' placed in a uniform stream having velocity $-V\hat{i}$. Then using Milne-Thomson's circle theorem, what will be its complex velocity potential ? If in addition, a circulation round the cylinder of k is produced, find out the stagnation points. Do they produce a lifting tendency in the vertical direction ? Explain how. 15

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

Q7. (a) आंशिक अवकल समीकरण $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24\,(y - x) + \sin\,(y - x)$ को हल कीजिए, जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, $z = z(x, y)$ हैं।

Solve the partial differential equation

$(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24\,(y - x) + \sin\,(y - x)$

where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, $z = z(x, y)$. 15

(b) सिम्पसन के $\frac{3}{8}$ नियम को एक बार उपयोग कर समाकल $\int_0^{0\cdot8} f(x)\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

$f(x) = 0{\cdot}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ है।

Evaluate the integral $\int_0^{0\cdot8} f(x)\,dx$,

where $f(x) = 0{\cdot}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

by using single application of Simpson's $\frac{3}{8}$ rule. 15

(c) 2a लंबी और m द्रव्यमान की एक चिकनी एकसमान छड़, माना OA, का एक सिरा एक निश्चित बिंदु O पर धुराग्रस्थ (पिवटिड) है। छड़ नीचे की ओर ऊर्ध्वाधर रेखा OZ से θ कोण पर झुकी हुई है और समतल OAZ, एक निश्चित ऊर्ध्वाधर समतल से कोण ϕ बनाती है। λm द्रव्यमान का एक मनका छड़ पर निर्विघ्न (स्मूथली) फिसलता है और nmg मापांक (मॉड्यूल्स) और प्राकृतिक लंबाई a की एक हल्की प्रत्यास्थ डोरी के द्वारा O से जुड़ा है। दर्शाइए कि इस तंत्र (सिस्टम) की गतिज ऊर्जा T, $2T = \frac{4}{3}ma^2\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin\theta) + \lambda m\,(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + x^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta)$ द्वारा दी जाती है, जहाँ x डोरी की तनी हुई (स्ट्रेच्ड) लंबाई है, और गति के समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।

A smooth uniform rod, say OA, of length 2a and mass m is pivoted at one end to a fixed point O. The rod is inclined at an angle θ with the downward vertical line OZ and the plane OAZ makes an angle ϕ with a fixed vertical plane. A bead of mass λm slides smoothly on the rod and is connected to O by a light elastic string of modulus nmg and natural length a. Show that the kinetic energy T of the system is given by $2T = \frac{4}{3}ma^2\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin\theta) + \lambda m\,(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + x^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta)$, where x is the stretched length of the string, and derive the equations of motion. 20

Q8. (a) समतलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) में द्विविमीय प्रसंवादी (हार्मोनिक) समीकरण निम्न रूप लेता है :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

निगमन कीजिए कि इसके हल का रूप $(Ar^n + Br^{-n})\, e^{\pm in\theta}$ है, जहाँ A, B, n अचर हैं। V ज्ञात कीजिए यदि यह क्षेत्र $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ में द्विविमीय प्रसंवादी समीकरण को संतुष्ट करता है और शर्तों :

(i) $r \to 0$ पर V परिमित रहता है,

(ii) $r = a$ पर $V = \sum_n c_n \cos(n\theta)$ है

को संतुष्ट करता है।

Two-dimensional harmonic equation in plane polar coordinates (r, θ) takes the form :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

Deduce that it has solutions of the form $(Ar^n + Br^{-n})\, e^{\pm in\theta}$, where A, B, n are constants. Determine V if it satisfies the two-dimensional harmonic equation in the region $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ and satisfies the conditions :

(i) V remains finite as $r \to 0$,

(ii) $V = \sum_n c_n \cos(n\theta)$ on $r = a$. *15*

(b) प्रारंभिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x},\ y(1) = 1,\ h = 1$ (पग-माप) का विचार कीजिए।

(i) y(2) का सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए चिरप्रतिष्ठित चतुष्कोटि रुंगे-कुट्टा विधि का उपयोग कीजिए।

(ii) y(2) और y(3) के मान ज्ञात करने के लिए ऑयलर विधि का उपयोग कीजिए।

Consider the initial value problem :

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x},\ y(1) = 1,\ h = 1$ (Step-size)

(i) Apply the classical fourth order Runge-Kutta method to approximate the solution y(2).

(ii) Use Euler's method to find y(2) and y(3). *15*

www.prepp.in

(c) त्रिज्या a, b (b > a) के दो संकेंद्री बेलनों के बीच एक श्यान असंपीड्य तरल भरा है। प्रवाह अपरिवर्ती है और कोई भी पिंड बल विचाराधीन नहीं है। तरल के वेग की विवेचना और इसे सूत्रित कीजिए यदि :

(i) आंतरिक बेलन को कोणीय वेग Ω दिया जाता है जबकि बाहरी बेलन को विरामावस्था में रखा जाता है;

(ii) बाहरी बेलन को कोणीय वेग Ω से घुमाया जाता है जबकि आंतरिक बेलन को विरामावस्था में रखा जाता है।

A viscous incompressible fluid is filled between two concentric cylinders of radius a, b (b > a). The flow is steady and no body forces are taken into consideration. Discuss and formulate the velocity of the fluid if :

(i) the inner cylinder is given angular velocity Ω while the outer one is held at rest;

(ii) the outer cylinder is rotated with angular velocity Ω while the inner one is held at rest. *20*