www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

Civil Services (Main) Examination, 2026

KVMS–P–STS

सांख्यिकी (प्रश्न-पत्र–I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे	अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं, जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको स्पष्टतया निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

STATISTICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) (i) n घटनाओं $A_1, A_2, \cdots, A_n$ के लिए दिखाइये कि

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Show that for n events $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$ 7

(ii) दो परस्पर अपवर्जित घटनाओं A तथा B के लिए दिखाइये कि

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}; \; P(A), \; P(B) > 0$$

For two mutually exclusive events A and B, show that

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}; \; P(A), \; P(B) > 0$$ 3

(b) माना X तथा Y का संयुक्त प्रायिकता द्रव्यमान फलन है

$$p(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{80}, \; x = 0, 1, 2; \; y = 1, 2, 3, 4$$

ज्ञात कीजिये—

(i) X तथा Y के सीमान्त प्रायिकता द्रव्यमान फलन;

(ii) $P(X \leq 1, Y > 2)$.

Let the joint probability mass function of X and Y be

$$p(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{80}, \; x = 0, 1, 2; \; y = 1, 2, 3, 4$$

Find—

(i) the marginal probability mass functions of X and Y;

(ii) $P(X \leq 1, Y > 2)$. 6+4=10

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(c) एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन है

$$f(x) = \frac{e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!};\ x > 0$$

जहाँ λ एक धनात्मक पूर्णांक है। चेबीशेव असमिका का उपयोग करते हुए दिखाइये कि

$$P[0 < X < 2(\lambda + 1)] > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

A random variable X has the probability density function

$$f(x) = \frac{e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!};\ x > 0$$

where λ is a positive integer. Using Chebyshev's inequality, show that

$$P[0 < X < 2(\lambda + 1)] > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$ 10

(d) (i) राव-ब्लैकवेल प्रमेय की सहायता से कैसे एकसमान न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक (UMVUE) ज्ञात करते हैं, वर्णन कीजिये।

Describe how Rao-Blackwell theorem enables one to find the UMVUE. 5

(ii) माना $X_1, X_2, \cdots, X_n$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जो एक समष्टि, जिसका प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.)

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1};\ 0 < x < 1,\ \theta > 0$$

है, से लिया गया है। दिखाइये कि $\prod_{i=1}^{n} X_i$, θ का पर्याप्त प्रतिदर्शज है।

Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ be a random sample from a population with p.d.f.

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1};\ 0 < x < 1,\ \theta > 0$$

Show that $\prod_{i=1}^{n} X_i$ is sufficient statistic of θ. 5

(e) $P(\theta)$ से आमाप n का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लेते हुए $H_0 : \theta \le \theta_0$ विरुद्ध $H_1 : \theta > \theta_0$ के परीक्षण के लिए संभाव्यता अनुपात परीक्षण (LRT) ज्ञात कीजिये।

Obtain the likelihood ratio test (LRT) for testing $H_0 : \theta \le \theta_0$ against $H_1 : \theta > \theta_0$, using a random sample of size n taken from $P(\theta)$. 10

Prepp
Your Personal Exams Guide

2. *(a)* *(i)* एक यादृच्छिक चर X, जिसका प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0 \ , & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है, का आघूर्ण जनक फलन (m.g.f.) ज्ञात कीजिये। इस आघूर्ण जनक फलन (m.g.f.) से $E(X)$ तथा $V(X)$ ज्ञात कीजिये।

Find the moment generating function (m.g.f.) of a random variable X with probability density function (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0 \ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using this m.g.f., find $E(X)$ and $V(X)$. 10

(ii) माना $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ एक यादृच्छिक चर X का अभिलक्षण फलन है। प्रतिलोमन सूत्र का उपयोग करते हुए X का प्रायिकता घनत्व फलन ज्ञात कीजिये।

Let $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ be the characteristic function of a random variable X. Using the inversion formula, find the probability density function of X. 10

(b) *(i)* एक कार की मरम्मत एक गैराज में कराने पर लगने वाला समय, घंटों में, एक यादृच्छिक चर X है, जिसका प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) है

$$f(x) = c(4x - x^2), \ 0 \le x \le 4, \ c \text{ एक स्थिरांक है}$$

c का मान निकालिये। इन घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि एक कार, जो गैराज में अब आती है, उसके लिए—

(1) X का मान कम-से-कम एक है परन्तु तीन से कम है;

(2) X का मान दो से अधिक है।

The time required, in hours, to repair a car at a garage is a random variable X with probability density function (p.d.f.)

$$f(x) = c(4x - x^2), \ 0 \le x \le 4, \ c \text{ is a constant}$$

Find the value of c. Obtain the probabilities that for a car which arrives now at the garage—

(1) X is at least one but less than three;

(2) X is more than two. 9

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

(ii) माना

$$f(x) = \frac{3x}{4}(2 - x);\ 0 < x < 2$$

एक सतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन है। X का संचयी बंटन फलन लिखिये तथा

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$$

ज्ञात कीजिये।

Let

$$f(x) = \frac{3x}{4}(2 - x);\ 0 < x < 2$$

be the probability density function of a continuous random variable X. Write the cumulative distribution function of X and find

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$$

6

(c) *(i)* माना X एकसमान बंटन का (0, 1) में अनुसरण करता है तथा माना $Y = -\log_e(1 - X)$. Y का बंटन ज्ञात कीजिये।

Let X follow uniform distribution on (0, 1) and let $Y = -\log_e(1 - X)$. Find the distribution of Y. 5

(ii) माना $X_1, X_2, \cdots$ स्वतन्त्र यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम इस प्रकार है कि

$$P[X_k = n] = \frac{1}{n} \text{ तथा } P[X_k = 0] = 1 - \frac{1}{n},\ k = 1, 2, \cdots$$

परीक्षण कीजिये कि इस श्रृंखला के लिए वृहत् संख्याओं का निर्बल नियम (WLLN) का अनुसरण होता है या नहीं।

Let $X_1, X_2, \cdots$ be a sequence of independent random variables such that

$$P[X_k = n] = \frac{1}{n} \text{ and } P[X_k = 0] = 1 - \frac{1}{n},\ k = 1, 2, \cdots$$

Check whether the weak law of large numbers (WLLN) holds for this sequence or not. 5

(iii) एक उत्पादक वस्तुओं का उत्पाद करता है, जिनका माध्य भार 100 g तथा प्रसरण 16 g^2 है। 64 वस्तुओं के प्रतिदर्श के लिए केन्द्रीय सीमा प्रमेय (CLT) का प्रयोग करते हुए $P(99 < \overline{X} < 101)$ ज्ञात कीजिये। $\overline{X}$, 64 वस्तुओं का प्रतिदर्श माध्य है।

A manufacturer produces items with mean weight 100 g and variance 16 g^2. For a sample of 64 items, find $P(99 < \overline{X} < 101)$, using central limit theorem (CLT). $\overline{X}$ is the sample mean of 64 items. 5

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

AREAS UNDER STANDARD NORMAL PROBABILITY CURVE

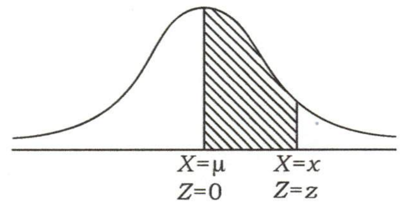
Normal probability curve is given by

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}; \ -\infty < x < \infty$$

and standard normal probability curve is given by

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right); \ -\infty < z < \infty$$

where $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$



The following table gives the shaded area in the diagram, viz., $P(0 < Z < z)$, $z > 0$, for different values of z :

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Prepp
Your Personal Exams Guide

3. *(a)* माना

$$f(x, y) = \frac{3}{4}\left(xy + \frac{x^2}{2}\right); \; 0 < x < 1, \; 0 < y < 2$$

X तथा Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन है। ज्ञात कीजिये—

(i) X तथा Y के सीमान्त प्रायिकता घनत्व फलन;

(ii) $E(X)$ तथा $V(X)$;

(iii) $E(Y)$ तथा $V(Y)$;

(iv) X तथा Y के मध्य सहप्रसरण;

(v) X तथा Y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक।

Let the joint probability density function of X and Y be

$$f(x, y) = \frac{3}{4}\left(xy + \frac{x^2}{2}\right); \; 0 < x < 1, \; 0 < y < 2$$

Find—

(i) the marginal probability density functions of X and Y;

(ii) $E(X)$ and $V(X)$;

(iii) $E(Y)$ and $V(Y)$;

(iv) covariance between X and Y;

(v) correlation coefficient between X and Y. 20

(b) बैटरियों के दो ब्रांड के जीवन-समय, घंटों में, नीचे दिये गये हैं :

ब्रांड A	:	40	30	40	45	55	30
ब्रांड B	:	50	50	45	55	60	40

(i) कोल्मोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षण तथा *(ii)* माध्यिका (मीडियन) परीक्षण का उपयोग करते हुए परीक्षण कीजिये कि क्या माध्य जीवन-समय के सापेक्ष ये दो ब्रांड भिन्न हैं।

$$\left[D_{6,\ 6,\ 0\cdot05} = \frac{4}{6}\right]$$

www.prepp.in

Prepp
Your Personal Exams Guide

The lifetimes, in hours, of two brands of batteries are given below :

Brand A	:	40	30	40	45	55	30
Brand B	:	50	50	45	55	60	40

Examine whether the two brands are different with respect to average life using *(i)* Kolmogorov-Smirnov test and *(ii)* median test.

$$\left[D_{6,\ 6,\ 0\cdot 05} = \frac{4}{6}\right]$$

8+7=15

(c) सिद्ध कीजिये कि एक-प्राचल चरघातांकी बंटन-समूह के लिए हमेशा एक पर्याप्त प्रतिदर्शज का अस्तित्व रहता है। इसके उपयोग से यह दिखाइये कि प्वासों प्रतिरूप के प्राचल के लिए प्रतिदर्श योग पर्याप्त प्रतिदर्शज है। यह भी बताइये कि क्या यह आकलक पूर्ण है।

Prove that there always exists a sufficient statistic for the one-parameter exponential family of distributions. Using it, show that sample total is sufficient statistic for the parameter for the Poisson model. State whether this estimator is complete. 15

4. *(a)* माना $X_1, X_2, \cdots, X_n$ स्वतन्त्र एवं समान बंटित (i.i.d.) यादृच्छिक चर हैं, जो $N(\mu, \sigma^2)$ का अनुसरण करते हैं। σ^2 का अधिकतम संभाविता आकलक ज्ञात कीजिये तथा परीक्षण कीजिये कि यह अनभिनत है या नहीं। यदि यह अभिनत है, तो σ^2 के लिए अनभिनत आकलक प्रस्तावित कीजिये तथा इसकी संगतता का परीक्षण कीजिये। आकलकों की वर्ग माध्य त्रुटियों की तुलना भी कीजिये।

Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ be i.i.d. random variables following $N(\mu, \sigma^2)$. Find the maximum likelihood estimator for σ^2 and examine whether the same is unbiased. If biased, suggest an unbiased estimator for σ^2 and examine whether it is consistent. Also compare the mean squared errors of the estimators. 20

(b) n आमाप का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $N(\theta, \sigma^2)$ से लिया जाता है। माना θ का पूर्व बंटन $N(\mu, \tau^2)$ है, जहाँ σ^2, μ एवं τ^2 ज्ञात हैं। θ का ब्येज़ आकलक *(i)* त्रुटि वर्ग हानि फलन तथा *(ii)* परम (absolute) त्रुटि हानि फलन के अन्तर्गत ज्ञात कीजिये।

A random sample of size n is drawn from $N(\theta, \sigma^2)$. Let the prior distribution of θ be $N(\mu, \tau^2)$, where σ^2, μ and τ^2 are known. Obtain the Bayes estimator for θ under *(i)* squared error loss function and *(ii)* absolute error loss function. 15

(c) क्रमबद्ध प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) का वर्णन कीजिये। प्वासों (θ) से लिये गये यादृच्छिक प्रेक्षणों से $H_0 : \theta = \theta_0$ विरुद्ध $H_1 : \theta = \theta_1$ के परीक्षण के लिए SPRT ज्ञात कीजिये। इस परीक्षण के लिये प्रचालन अभिलक्षण फलन (OC function) भी ज्ञात कीजिये।

Describe sequential probability ratio test (SPRT). Find the SPRT for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta = \theta_1$, using random observations from Poisson (θ). Also find the OC function for the test. 15

Prepp
Your Personal Exams Guide

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* माना $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ एक समष्टि, जिसका माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 है, से n स्वतन्त्र प्रेक्षण हैं। μ का सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आकलक तथा σ^2 का द्विघातीय अनभिनत आकलक ज्ञात कीजिये।

Let $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ be n independent observations from a population with mean μ and variance σ^2. Obtain the best linear unbiased estimator of μ and an unbiased quadratic estimator for σ^2. 10

(b) विविक्तकर विश्लेषण में वर्गीकरण समस्या को समझाइये। दो ज्ञात बहुचर प्रसामान्य समष्टियों के लिए फिशर के विविक्तकर फलन को परिभाषित कीजिये तथा नीचे दिये गये आँकड़ों के लिए इसकी गणना कीजिये :

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ तथा } \sum = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Explain the problem of classification in discriminant analysis. In case of two known multivariate normal populations, define Fisher's discriminant function and calculate it for the data given below :

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ and } \sum = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

10

(c) गॉस-मार्कोव रेखीय प्रतिरूप $\underset{n\times 1}{\mathbf{Y}} = \underset{n\times p}{X} \underset{p\times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n\times 1}{\mathbf{u}}$ की $E(\mathbf{Y}) = X\boldsymbol{\beta}$ तथा $D(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$ के प्रसरण एवं सह-प्रसरण आव्यूह $= \sigma^2 I$ के साथ विवेचना करते हुए दिखाइये कि

$$E[\mathbf{Y}'\{I - X(X'X)^{-1}X'\}\mathbf{Y}] = \sigma^2(n-p)$$

Discussing Gauss-Markov linear model $\underset{n\times 1}{\mathbf{Y}} = \underset{n\times p}{X} \underset{p\times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n\times 1}{\mathbf{u}}$ with $E(\mathbf{Y}) = X\boldsymbol{\beta}$ and $D(\mathbf{Y})$ = variance and covariance matrix of $\mathbf{Y} = \sigma^2 I$, show that

$$E[\mathbf{Y}'\{I - X(X'X)^{-1}X'\}\mathbf{Y}] = \sigma^2(n-p)$$

10

(d) पुनःस्थापनरहित सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श (SRSWOR) के प्रतिदर्श माध्य के प्रसरण को व्युत्पन्न कीजिये।

Derive the variance of the sample mean under simple random sample without replacement (SRSWOR). 10

(e) एक समष्टि तीन स्तरों में विभाजित की जाती है। समष्टि से निम्नलिखित आँकड़े लिये गये हैं :

स्तर h	N_h	S_h^2	C_h
1	200	25	4
2	300	36	9
3	500	49	16

(i) आनुपातिक नियतन तथा *(ii)* इष्टतम नियतन के अन्तर्गत प्रत्येक स्तर के लिए प्रतिदर्श आमाप ज्ञात कीजिये, जबकि कुल प्रतिदर्श आमाप 100 है।

Prepp
Your Personal Exams Guide

A population is divided into three strata. The following data are taken from the population :

Stratum h	N_h	S_h^2	C_h
1	200	25	4
2	300	36	9
3	500	49	16

Determine the sample size for each stratum for a total sample of size 100 under *(i)* proportional allocation and *(ii)* optimum allocation. 10

6. *(a)* माना $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$, प्राचलों $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ का कोई आकलनीय रैखिक फलन है। तब सिद्ध कीजिये कि—

(i) यादृच्छिक चरों $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ का एक एकल रेखीय फलन $\mathbf{c}'\mathbf{Y}$ का मान अस्तित्व में इस प्रकार है कि $\mathbf{c} \in V(A')$ तथा $E(\mathbf{c}'\mathbf{Y}) = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$, जहाँ $V(A')$, A' की पंक्ति सदिशों द्वारा जनित सदिश समष्टि है तथा $E(\mathbf{Y}) = A\boldsymbol{\beta}$;

(ii) $\mathbf{c}'\mathbf{Y}$ का प्रसरण किसी अन्य रेखीय अनभिनत आकलक के प्रसरण से कम है।

Let $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ be any estimable linear function of parameters $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$. Then prove that—

(i) there exists a unique linear function $\mathbf{c}'\mathbf{Y}$ of random variables $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ such that $\mathbf{c} \in V(A')$ and $E(\mathbf{c}'\mathbf{Y}) = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$, where $V(A')$ is the vector space generated by row vectors of A' and $E(\mathbf{Y}) = A\boldsymbol{\beta}$;

(ii) variance of $\mathbf{c}'\mathbf{Y}$ is less than the variance of any other linear unbiased estimator. 20

(b) माना $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_N$, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। दिखाइये कि $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ विरुद्ध $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ के परीक्षण के लिए होटलिंग का T^2-प्रतिदर्शज $H_0 : \mu = \mu_0$ विरुद्ध $H_1 : \mu \neq \mu_0$ के परीक्षण के लिए एक-चरीय t-प्रतिदर्शज का सामान्यीकरण है। $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ के परीक्षण के लिए T^2-प्रतिदर्शज की गणना नीचे दिये गये एक द्विचरीय प्रसामान्य बंटन से लिये गये आँकड़ों के आधार पर कीजिये :

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Prepp
Your Personal Exams Guide

Let $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_N$ be a random sample from $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Show that Hotelling's T^2-statistic for testing $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ against $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ is a generalization of t-statistic for testing $H_0 : \mu = \mu_0$ against $H_1 : \mu \neq \mu_0$ in the univariate case. Calculate T^2-statistic for testing $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ on the basis of the data taken from a bivariate normal distribution given below :

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

15

(c) एकल चर पर लम्बकोणीय बहुपद प्रतिगमन की विवेचना उसके मुख्य लाभों के साथ कीजिये।

Discuss orthogonal polynomial regression on a single variable along with its principal advantages. 15

7. (a) (i) क्रमबद्ध प्रतिचयन के अन्तर्गत समष्टि माध्य का आकलक दीजिये तथा इसका प्रसरण अन्तःवर्ग सहसम्बन्ध गुणांक के पदों में व्युत्पन्न कीजिये।

Give an estimate for the population mean under systematic sampling and derive its variance in terms of the intraclass correlation coefficient. 10

(ii) इस आकलक की दक्षता पर अन्तःवर्ग सहसम्बन्ध के प्रभाव की चर्चा कीजिये।

Discuss the effect of intraclass correlation on the efficiency of this estimator. 5

(b) निम्नलिखित आँकड़े एक दो-कारक यादृच्छिक प्रभाव वाले प्रतिरूप से हैं :

कारक B / कारक A	B_1	B_2	B_3
A_1	6 8	10 12	14 16
A_2	12 14	16 18	20 22

(i) दिया है कि प्रयोग करने वाला सशंकित है कि दोनों कारक परस्पर प्रभावित हो सकते हैं, उपर्युक्त आँकड़ों के लिए सभी मान्यताओं के साथ रैखिक प्रतिरूप लिखिये।

(ii) परिकल्पना को स्पष्ट रूप से लिखते हुए मुख्य प्रभावों तथा परस्पर प्रभावों का परीक्षण प्रसरण विश्लेषण की पूर्ण सारिणी के साथ उपर्युक्त आँकड़ों का उपयोग करते हुए कीजिये।

Prepp
Your Personal Exams Guide

The following data come from a two-factor random effect model :

Factor B / Factor A	B_1	B_2	B_3
A_1	6 8	10 12	14 16
A_2	12 14	16 18	20 22

(i) Given that the experimentor suspects interaction, write the linear model stating all the assumptions for the above data.

(ii) Clearly stating the hypothesis, carry out the tests for the main effects and interactions giving the complete ANOVA table for the above data.

5+15=20

(c) एक संतुलित अपूर्ण खण्डक अभिकल्प (BIBD) के प्राचल हैं $v = 4$ (कारक), $b = 6$ (खण्डक), $r = 3$ (प्रतिकृति प्रत्येक कारक की), $k = 2$ (खण्डक आमाप), $\lambda = 1$. निम्नलिखित समायोजित उपचार (या कारक) योग (खण्डक प्रभाव को हटाकर) इस प्रकार दिए गए हैं : $Q_1 = 12$, $Q_2 = 8$, $Q_3 = 4$ तथा $Q_4 = 0$. दी हुई माध्य वर्ग त्रुटि = 2·5.

(i) सत्यापित कीजिये कि यह एक विधिमान्य BIBD है।

(ii) उपचार प्रभावों एवं उनके प्रसरणों का आकलन कीजिये।

(iii) इस BIBD के दक्षतांक को यादृच्छिक पूर्ण खण्डक अभिकल्प के सापेक्ष उसी प्रतिकृति संख्या के साथ ज्ञात कीजिये।

A balanced incomplete block design (BIBD) has parameters $v = 4$ (treatments), $b = 6$ (blocks), $r = 3$ (replicates per treatment), $k = 2$ (block size), $\lambda = 1$. The following adjusted treatment totals (after removing block effects) are given as $Q_1 = 12$, $Q_2 = 8$, $Q_3 = 4$ and $Q_4 = 0$. The MSE is given as 2·5.

(i) Verify if this is a valid BIBD.

(ii) Estimate the treatment effects and their variances.

(iii) Compute the efficiency factor of this BIBD relative to a randomized complete block design with the same number of replications.

5+5+5=15

www.prepp.in

Percentage Points of the F-Distribution

$F_{0.05,\, \upsilon_1,\, \upsilon_2}$

Degrees of Freedom for the Numerator (υ_1)

υ_2 \ υ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.55	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Degrees of Freedom for the Denominator (υ_2)

Prepp
Your Personal Exams Guide

8. *(a)* बहुचरीय प्रसामान्य बंटन को परिभाषित कीजिये तथा इसके महत्त्वपूर्ण गुणधर्म लिखिये। माना $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ तथा $\mathbf{X}_4$ परस्पर स्वतन्त्र यादृच्छिक सदिश हैं, जो $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ का अनुसरण करते हैं। तब

(i) $\mathbf{W}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$

(ii) $\mathbf{W}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$

का सीमान्त बंटन ज्ञात कीजिये। यादृच्छिक सदिशों $\mathbf{W}_1$ तथा $\mathbf{W}_2$ का संयुक्त बंटन भी ज्ञात कीजिये।

Define multivariate normal distribution and write down its important properties. Let $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ and $\mathbf{X}_4$ are mutually independent random vectors following $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Then find the marginal distributions of

(i) $\mathbf{W}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$

(ii) $\mathbf{W}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$

Also obtain the joint distribution of random vectors $\mathbf{W}_1$ and $\mathbf{W}_2$. 20

(b) एक $N = 4$ की समष्टि में इकाइयों के मान हैं $y_1 = 10$, $y_2 = 20$, $y_3 = 30$ तथा $y_4 = 40$. एक $n = 2$ आकार के पुनःस्थापना रहित प्रतिदर्श पर विचार कीजिये, जिसमें सम्मिलित होने की प्रायिकता, इकाई के लिए उसके आकार x_i के समानुपाती है, जहाँ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. समावेशी प्रायिकताओं को लिया जाता है

$$\pi_i = \frac{nx_i}{\sum x_i};\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) मान लीजिये प्रतिचयनित प्रतिदर्श है $\{2, 4\}$. हॉरविट्ज-थॉम्पसन आकलक से, समष्टि योग को आकलित कीजिये।

(ii) दिया है कि इकाई 2 एवं 4 के लिए संयुक्त समावेशी प्रायिकता है $\pi_{24} = 0 \cdot 3$, तब हॉरविट्ज-थॉम्पसन आकलक का प्रसरण ज्ञात कीजिये तथा उसके ऋणात्मक प्रसरण आकलक की सम्भावना पर टिप्पणी कीजिये।

A population of $N = 4$ units has values $y_1 = 10$, $y_2 = 20$, $y_3 = 30$ and $y_4 = 40$. Consider a sample of size $n = 2$ without replacement with inclusion probabilities proportional to a size measure x_i, where $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. The inclusion probabilities are taken as

$$\pi_i = \frac{nx_i}{\sum x_i};\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) Suppose the selected sample is $\{2, 4\}$. Using Horvitz-Thompson estimator, estimate the population total.

(ii) Given the joint inclusion probabilities $\pi_{24} = 0 \cdot 3$ for units 2 and 4, estimate the variance of Horvitz-Thompson estimator and comment on the possibility of negative variance estimate. 7+8=15

Prepp
Your Personal Exams Guide

(c) (i) पूर्ण संकरण एवं आंशिक संकरण में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

Distinguish between complete confounding and partial confounding. 5

(ii) उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिये कि एक 2^4-बहुउपादानी प्रयोग का 2 प्रतिकृतियों के साथ 2^2 खण्डकों में आंशिक संकरण आप कैसे करेंगे, जिससे कोई भी मुख्य प्रभाव संकरित न हो। प्रत्येक प्रतिकृति में संकरित प्रभाव का उल्लेख कीजिये।

Illustrate how you will partially confound a 2^4-factorial experiment into 2^2 blocks in 2 replicates with no main effects confounded. State the confounded effects in each replicate. 10

★★★